Exercice 41 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On suppose φ et φ'' bornées et on pose $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|$ $M_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi''(x)|$

□ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$ fixés

On considère $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_x(t) = \varepsilon_0 \varphi(x + \varepsilon_1 t)$

avec $\varepsilon_0 = 1$ si $\varphi(x) \geqslant 0$, $\varepsilon_0 = -1$ si $\varphi(x) < 0$

$\varepsilon_1 = 1$ si $\varepsilon_0 \varphi'(x) \geqslant 0$, $\varepsilon_1 = -1$ si $\varepsilon_0 \varphi'(x) < 0$

Alors $g_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe C^2, g_x et g_x'' sont bornées et $g_x(0) = |\varphi(x)|$, $g_x'(0) = |\varphi'(x)|$ sont positifs ou nuls et $M_0 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g_x(t)|$, $M_2 = \sup_{t\in\mathbb{R}} |g_x''(t)|$.

D'après la formule de Taylor Lagrange appliquée à l'ordre 2 à g entre 0 et a il existe $c \in [0,a]$ tel que $g_x(a) = g_x(0) + a g_x'(0) + \frac{a^2}{2} g_x''(c)$

Donc $a|\varphi'(x)| = a g_x'(0) = g_x(a) - g_x(0) - \frac{a^2}{2} g_x''(c)$

Puisque $g_x(0) \geqslant 0$ et $g_x(a) \leqslant M_0$ on a

$$M_0 - \frac{a^2}{2} g_x''(c) \geqslant a|\varphi'(x)|$$

donc $M_0 + \frac{a^2}{2} M_2 \geqslant a|\varphi'(x)|$ puisque $|g_x''(c)| \leqslant M_2$

Ainsi, puisque $a > 0$, $\frac{M_0}{a} + \frac{a M_2}{2} \geqslant |\varphi'(x)|$

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a > 0$ $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{M_0}{a} + \frac{a M_2}{2}$ $(*)$

□ * Soit $x \in \mathbb{R}$ on applique $(*)$ avec $a = \sqrt{\frac{M_0}{M_2}}\sqrt{2}$ si M_0 et $M_2 \neq 0$

on obtient $|\varphi'(x)| \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$ et donc $M_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi'(x)| \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$

* Si $M_0 = 0$ alors $M_2 = 0$ et $M_1 = 0$ donc on a bien $M_1 \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$

* Si $M_0 \neq 0$ et $M_2 = 0$ alors $M_1 = \text{cte}$. Puisque φ est bornée nécessairement $M_1 = 0$ (car $\varphi' \text{ cte} \Rightarrow \varphi$ affine) et on a bien encore $M_1 \leqslant \sqrt{2 M_0 M_2}$