Exercice 40

1) Soient $f : I \to \mathbb{R}$ convexe et dérivable sur un intervalle I et $a, x \in I$

Puisque f est dérivable d'après le théorème des accroissements finis, il existe c compris entre a et x tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c)$ si $x \neq a$.

On a donc si $x \neq a$ $\quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$ où c est compris entre a et x.

Puisque f est dérivable, f' est croissante.

Par conséquent, • si $x > a$ alors $c \in]a, x[$ et $f'(c) \geq f'(a)$

et donc $\quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$

• si $x < a$ alors $c \in]x, a[$ et $f'(c) \leq f'(a)$

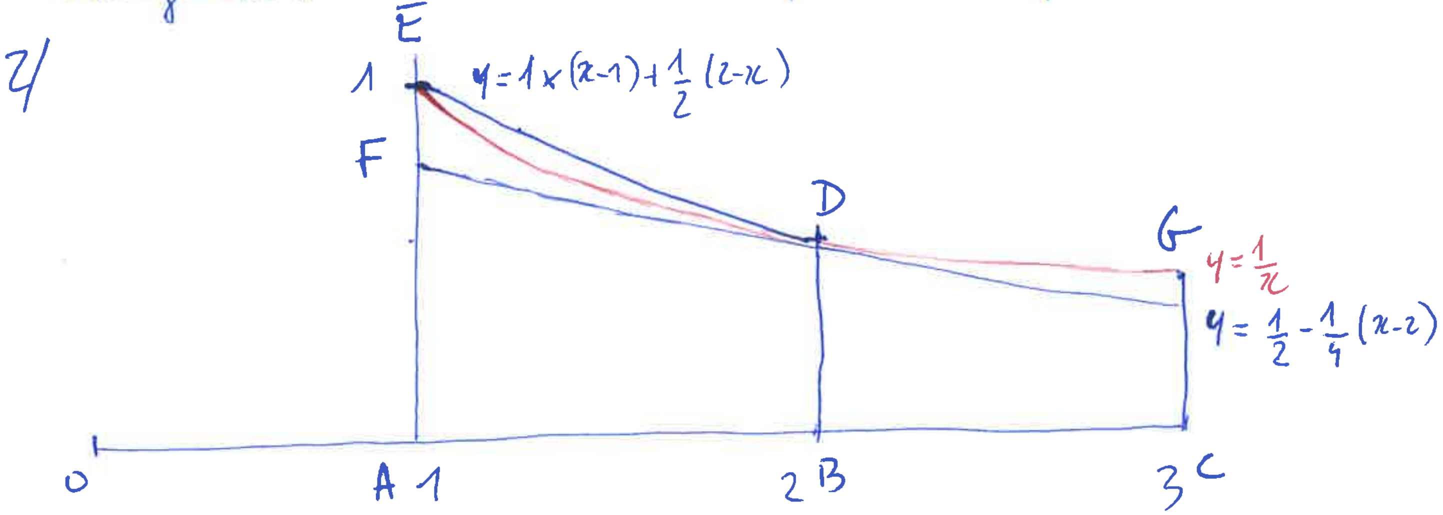
et donc $\quad f(x) = f(a) + f'(c)(x-a) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$

Si $x = a$ alors $\quad f(a) + f'(a)(x-a) = f(a) + f'(a)(a-a) = f(a) = f(x)$!

Dans tous les cas on a si $x, a \in I$ $\quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Cette inégalité est la traduction analytique du fait que le graphe d'une fonction convexe soit au-dessus de ses tangentes. Elle est stricte sauf en $a = x$ si f strictement convexe.

2/



Puisque la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ est convexe et même strictement convexe car $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$.

il vient :

- Sur [1,2] $f(x) \leqslant 1\,(x-1) + \frac{1}{2}\,(2-x)$

  et donc $\ln(2) = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \leqslant \int_1^2 \left(1\,(x-1) + \frac{1}{2}(2-x)\right) dx$ et l'intégrale de droite est l'aire de ABDE (voir figure) et vaut $\frac{3}{4}$ et On a donc $\ln(2) \leqslant \frac{3}{4}$;

- Sur [1,2] $f(x) \geqslant \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,(x-2)$ et l'égalité n'a lieu qu'en 2

  et donc $\ln(3) = \int_1^3 \frac{1}{x}\,dx > \int_1^3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)\right) dx$ et l'intégrale de droite est l'aire de ACGE (voir figure) et vaut 1 et on a donc $\ln(3) > 1$.

Finalement $\ln(2) \leqslant \frac{3}{4} < 1 < \ln(3)$ et par exponentiation il vient $2 < e < 3$.