Exercice 4

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$. Si $t \in [k, k+1]$ alors

$k \leq t \leq k+1$ et donc $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$.

Par intégration des fonctions continues $t \mapsto \frac{1}{k+1}, \frac{1}{t}, \frac{1}{k}$ les inégalités deviennent

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\, dt \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dt = \frac{1}{k}.$$

En sommant sur $k \in \{1, \dots, n\}$ il vient

$$H_n + \frac{1}{n+1} - 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$$

C'est à dire

$$\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq \underbrace{\int_1^{n+1} \frac{dt}{t}}_{H_n} + 1 - \frac{1}{n+1} = \ln(n+1) + 1 - \frac{1}{n+1}$$

Or $\ln(n+1) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ car $(n+1) = n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et

puisque $\lim_{+\infty} \ln(x) = +\infty$ et que $\lim_{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(1) = 0$

et que $\lim_{+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ il vient

$$1 + \frac{1}{\ln(n)} \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)} \times \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n)\cdot(n+1)}$$

donc $\lim_{+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$. Ainsi $\lim_{+\infty} H_n = +\infty$ et $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$