Exercice 39 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, C^2 et telle que f'' soit bornée.

1) Soit $M = \sup_{\mathbb{R}} |f''|$. Par hypothèse $M \in \mathbb{R}$.

a) Soit $(x, \lambda) \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 il existe c compris entre x et $x+\lambda$ tel que

$$f(x+\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c)$$

Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ on a donc

$$0 \leq f(x+\lambda) = f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} f''(c) \leq f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$ on vient de montrer que le polynôme du second degré $\lambda \longmapsto f(x) + \lambda f'(x) + \frac{\lambda^2}{2} M$ était positif ou nul. Son discriminant Δ est donc négatif ou nul :

$$\Delta = (f'(x))^2 - M f(x) \leq 0$$

Par conséquent $(f'(x))^2 \leq M f(x)$

et donc $|f'(x)| \leq \sqrt{M f(x)}$

2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On pose $g = \sqrt{f}$

a) Puisque $f(x_0) = 0$ et que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, f atteint un minimum en x_0 et $f'(x_0) = 0$.

Si $x \neq x_0$ la formule de Taylor Lagrange donne c entre x et x_0 tel que $f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c)$

c'est à dire, puisque $f(x_0) = f'(x_0) = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(c).$$

b) Supposons g dérivable en x_0 alors, puisque $g(x_0) = 0$, et g à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, la fonction g atteint un minimum en x_0 et $g'(x_0) = 0$.

Ainsi $g(x) = (x-x_0)\,\varepsilon_0(x)$ avec $\lim_{x_0} \varepsilon_0(x) = 0$

Donc $f(x) = g(x)^2 = (x-x_0)^2 \varepsilon_0^2(x)$ avec $\lim_{x_0} \varepsilon_0(x) = 0$

La formule de Taylor Young appliquée à f en x_0 donne

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-x_0)^2 f''(x_0) + (x-x_0)^2 \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{0} \varepsilon_1(x) = 0$$

En raison de l'unicité du développement limité d'ordre 2 de f en x_0 il vient que $\frac{1}{2} f''(x_0) = 0$ c'est à dire que $f''(x_0) = 0$.

Par contraposée, si $f''(x_0) > 0$ alors g n'est pas dérivable en x_0