Exercice 38 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dérivable et telle que si $x\in\mathbb{R}$ $f(x)=x\,f'\left(\frac{x}{2}\right)$

1/ Puisque f est dérivable elle est aussi continue.

Si $x\neq 0$ l'égalité $f(x)=x\,f'\left(\frac{x}{2}\right)$ donne $f'(x)=\dfrac{f(2x)}{2x}$.

Cette égalité implique, puisque $x\longmapsto\frac{1}{2x}$ et f continues sur $\mathbb{R}^*$ ainsi que $x\longmapsto 2x$, que f' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

L'égalité $f(x)=x\,f'\left(\frac{x}{2}\right)$ donne aussi avec $x=0$ $f(0)=0$. On en déduit que $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}=f'\left(\frac{x}{2}\right)$

Par passage à la limite on obtient que

$$f'(0)=\lim_0\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_0\frac{f(x)}{x}$$ et donc

$$f'(0)=\lim_0\frac{f(x)}{x}=\lim_0 f'\left(\frac{x}{2}\right)$$. Par conséquent

la fonction f' est aussi continue en 0.

Finalement f' est continue sur $\mathbb{R}$ et f est donc C^1

2/ Soit $n\geq 2$. On suppose f de classe C^n

Soit $p\in\mathbb{N}$ avec $p\in\{1,\dots,n\}$. On applique la formule de Taylor Young à l'ordre p à f et à l'ordre $p-1$ à f'. On obtient, en utilisant le fait que $f(0)=0$

$$f(x)=f'(0)x+\dots\dots+\frac{1}{p!}f^{(p)}(0)\,x^p+x^p\varepsilon_0(x)\quad\text{avec}\ \lim_0\varepsilon_0(x)=0$$

et

$$f(x)=x\,f'\left(\frac{x}{2}\right)=x\left[f'(0)+\dots+\frac{1}{(p-1)!}\frac{1}{2^{p-1}}f^{(p)}(0)\,x^{p-1}+x^{p-1}\varepsilon_1(x)\right]\text{avec}\ \lim_0\varepsilon_1(x)=0$$

En identifiant les termes d'ordre p qui sont égaux parce que f admet un unique développement limité d'ordre p on obtient $\frac{1}{p}f^{(p)}(0)=\frac{1}{2^{p-1}}f^{(p)}(0)$

c'est à dire $f^{(p)}(0)=0$ ou $2^{p-1}=p$.

L'égalité $2^{p-1}=p$ n'est possible que si $p=1$ ou $p=2$ et si $p\geq 3$ alors $f^{(p)}(0)=0$.