Exercice 37 Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$

On a $(t^2-1)^n = (t-1)^n (t+1)^n$

$$= (t-1)^n ((t-1)+2)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} (t-1)^{n+k}$$

D'après la formule de Taylor Young appliquée à la fonction f qui à t associe $(t^2-1)^n$ en $t=1$ on a que si $k=0,\dots,n$ alors

$$\frac{f^{(n+k)}(1)}{(n+k)!} = 2^{n-k}\binom{n}{k} = 2^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Pour $k=0$ on obtient $\frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$ et donc

$$f^{(n)}(1) = 2^n n!$$

Or l'application $L_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à t associe $\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$ n'est rien d'autre que la fonction $f^{(n)}$. Ainsi on a bien $L_n(1) = 2^n n!$ si $n \in \mathbb{N}$

Or $f(t) = f(-t)$ si $t \in \mathbb{R}$ (f est paire). Donc si $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(t) = (-1)^n f^{(n)}(-t)$ et $(-1)^n f^{(n)}(t) = f^{(n)}(-t)$

Par conséquent $L_n(-1) = f^{(n)}(-1) = (-1)^n f^{(n)}(1) = (-1)^n L_n(1) = (-1)^n 2^n n!$

Finalement si $n \in \mathbb{N}$ $L_n(1) = 2^n n!$ et $L_n(-1) = 2^n n! (-1)^n$.