Exercice 36 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2. On suppose $f(0) = f'(0) = 0$ et on pose

$$g(x) = \begin{cases} f(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ f(-\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) $l : x \mapsto \sqrt{x}$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ donc $g_{|]0,+\infty[} = f \circ l$ est C^1 sur $]0,+\infty[$ car composée de fonctions C^1

$h : x \mapsto -\sqrt{-x}$ est C^1 sur $]-\infty,0[$ donc $g_{|]-\infty,0[} = f \circ h$ est C^1 sur $]-\infty,0[$ car composée de fonctions C^1

2) $\lim\limits_{0^+} \sqrt{x} = \lim\limits_{0^-} -\sqrt{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{0^+} g = f(0)$ puisque f est continue en 0 : $f(0) = \lim\limits_{0^+} \sqrt{x}$ et $\lim\limits_{0^-} g = f(0)$ puisque f est continue en 0 : $f(0) = \lim\limits_{0^-} -\sqrt{-x}$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g = f(0) = g(0)$. Donc g est bien continue en 0

3) Si $x > 0$ $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} f'(\sqrt{x})$

On $f''(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f'(t) - f'(0)}{t - 0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$ et $f(0) = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = \frac{1}{2} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(\sqrt{x}) - f(0)}{\sqrt{x} - 0} = \frac{f''(0)}{2}$

Si $x < 0$ $g'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} f'(-\sqrt{x})$

On $f''(0) = \lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f'(t) - f'(0)}{t - 0}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -\sqrt{-x} = 0$ et $f(0) = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{-x}} f'(-\sqrt{-x}) = -\frac{1}{2} \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(-\sqrt{-x}) - f(0)}{-\sqrt{-x} - 0} = \frac{-f''(0)}{2}$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = \frac{f''(0)}{2}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g'(x) = -\frac{f''(0)}{2}$

4) Une fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ est C^1 ssi la dérivée de sa restriction à $\mathbb{R}^*$ admet un prolongement par continuité en 0 c'est à dire ssi la dérivée de sa restriction à $\mathbb{R}^*$ admet une limite finie en 0.

Ce résultat appliqué à g qui est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et qui vérifie $\lim_{0^+} g' = \frac{f''(0)}{2}$ et $\lim_{0^-} g' = -\frac{f''(0)}{2}$ indique qu'une condition nécessaire et suffisante pour que g soit C^1 est que

$$\frac{f''(0)}{2} = \lim_{0^+} g' = \lim_{0^-} g' = -\frac{f''(0)}{2}$$ c'est à dire

que $f''(0) = 0$

La fonction g est C^1 ssi $f''(0) = 0$.