Exercice 35

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et telle que $f(-1)=f(1)=0$

Soit $\alpha \in]-1,1[$. On note P le polynôme de degré 2 défini par $P(x) = -\frac{f(\alpha)}{1-\alpha^2}(1-x^2)$. On a $P(-1)=P(1)=0$ et $P(\alpha)=-f(\alpha)$

Puisque $f(-1)=f(1)=0$ il vient que $g=f+P$ vérifie $g(-1)=g(1)=g(\alpha)=0$.

La fonction g est $\mathcal{C}^2$. D'après le théorème de Rolle appliqué à g entre -1 et α puis entre α et 1 on trouve $a \in]-1,\alpha[$ et $b \in]\alpha,1[$ tels que $g'(a)=g'(b)=0$.

La fonction g' est $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Rolle appliqué à g' entre a et b on trouve $c \in]a,b[$ tel que $g''(c)=0$

On a $g''(c) = f''(c) + P''(c) = f''(c) + \frac{2f(\alpha)}{1-\alpha^2}$

Par conséquent on a $0 = g''(c) = f''(c) + \frac{2f(\alpha)}{1-\alpha^2}$

Ainsi on a prouvé l'existence de $c \in]-1,1[$ tel que $f''(c) = \frac{2}{\alpha^2-1} f(\alpha)$ et donc $f(\alpha) = \frac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$

Puisque $\alpha \in]-1,1[$ $\left|\frac{\alpha^2-1}{2}\right| \leq 1$ et donc $|f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|f''(c)|$

Il vient donc, puisque f est continue sur $[-1,1]$ on a $\sup_{]-1,1[}|f| = \sup_{[-1,1]}|f|$ et donc $\sup_{x\in[-1,1]}|f(x)| = \sup_{\alpha\in]-1,1[}|f(\alpha)| \leqslant \sup_{c\in]-1,1[} \frac{1}{2}|f''(c)|$. Ce qui établit l'inégalité voulue □