Exercice 39 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=x+2x^2\sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$

1) Puisque $|f(x)|\leq |x|+2|x|^2$ et que

$$\lim_{x\to 0} |x|+2|x|^2 = 0 = f(0)$$

On en déduit que $\lim\limits_{0} f(x) = 0 = f(0)$ et

que $f$ est continue en $0$

2) Soit $x\neq 0$ le taux d'accroissement de $f$ entre $0$ et $x$

est $\tau(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1+2x\sin\frac{1}{x}$

Donc $|\tau(x)-1|\leq 2|x|$ si $x\neq 0$. On $\lim\limits_{0}|x|=0$

Ainsi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} |\tau(x)-1| = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}} \tau(x)=1$

Ceci signifie que $f$ est dérivable en $0$ et

$$f'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\x\neq 0}}\tau(x)=1$$

3) La fonction $f$ est dérivable en $0$ et $f'(0)=1$ mais aussi en dehors de $0$ et si $x\neq 0$ $f'(x)=1+4x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Soit $x_n=\dfrac{1}{2\pi n}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$ $f'(x_n)=1-2=-1$

Soit $\varepsilon>0$. Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $n>\dfrac{1}{2\pi\varepsilon}$ $x_n\in]0,\varepsilon[$.

On a $f'(x_n)=-1$. Il existe donc $y_n\in]x_n,\varepsilon[$ proche de $x_n$

tel que $\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}<0$ puisque $\lim\limits_{y\to x_n, y\neq x_n} f'(y)=-1$

et donc $f(y_n)<f(x_n)$ alors que $y_n>x_n$

La fonction $f$ n'est pas croissante sur $]0,\varepsilon[$. Comme c'est le cas pour tout $\varepsilon>0$

la fonction $f$ n'est pas croissante près de $0$.

4) On a montré que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ alors $f'(x_n) = -1$. On constate maintenant qu'on a, en posant $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi}$, d'une part $x_{n+1} < y_n < x_n$ et d'autre part $f'(y_n) = 3$.

Puisque la dérivée $f'$ est continue en restriction à $[y_n, x_n]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f'_{[y_n, x_n]}$ il existe $z_n \in ]y_n, x_n[$ tel que $f'(x_n) = -1 < f'(z_n) = 1 < f'(y_n) = 3$.

Puisque si $n \in \mathbb{N}^*$ $0 < z_n < x_n$ et que $\lim_{+\infty} x_n = 0$ on a aussi $\lim_{+\infty} z_n = 0$.

Par conséquent si $\alpha > 0$ il existe $N_\alpha \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N_\alpha$ on a $0 < z_n < x_n < \alpha$ et $f'(z_n) = 1$, $f'(x_n) = -1$.

Ça prouve que pour tout $\alpha > 0$. Il existe des points de $[-\alpha, \alpha]$ où $f'$ vaut $1$ (les $z_n$ par exemple dès que $n \geqslant N_\alpha$) et d'autres où $f'$ vaut $-1$ (les $x_n$ par exemple dès que $n \geqslant N_\alpha$).

5) Soit $\alpha > 0$. D'après 4) il existe $x, x' \in [-\alpha, \alpha]$ tels que $f'(x) = -1$ et $f'(x') = -1$.

On va raisonner comme dans 3). Puisque $\lim_{\substack{t \to x \\ t \neq x}} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = f'(x) = -1$ il existe $y \in [-\alpha, \alpha]$ tel que $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < 0$. Ceci implique que $f$ n'est pas croissante sur $[-\alpha, \alpha]$. De même, puisque $\lim_{\substack{t \to x' \\ t \neq x'}} \frac{f(t) - f(x')}{t - x'} = f'(x') = -1$ il existe $y' \in [-\alpha, \alpha]$ tel que $\frac{f(y') - f(x')}{y' - x'} > 0$. Ceci implique que $f$ n'est pas décroissante sur $[-\alpha, \alpha]$. Ainsi si $\alpha > 0$, la restriction de $f$ à $[-\alpha, \alpha]$ n'est pas monotone. Comme c'est vrai pour tout $\alpha > 0$ ceci signifie que $f$ n'est pas monotone au voisinage de $0$.

<u>Remarque</u> On retiendra de 3) et 5) le fait suivant. Si $I$ est un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable alors s'il existe $a \in I$ tel que $f'(a) > 0$, la fonction $f$ n'est pas décroissante et si $f'(a) < 0$, la fonction $f$ n'est pas croissante.