Exercice 33

1) Soit $\alpha > 0$ et soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ $\frac{1}{2}$

La fonction f est dérivable et si $x \in]0, +\infty[$ $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$

Si on applique le théorème des accroissements finis à f entre $n-1$ et n lorsque $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$ et $n \neq 1$ on trouve l'existence de $x \in]n-1, n[$ tel que

$$\frac{f(n) - f(n-1)}{1} = f'(x)$$

c'est à dire $$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$$

et donc $$\frac{1}{x^{\alpha+1}} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Or la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est strictement décroissante.

Donc $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ puisque $x < n$

Ainsi $$\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)$$

2) Soit maintenant $\beta > 1$ (on préfère changer la notation pour éviter les confusions avec 1))

Si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\beta}$

La suite S_n est croissante car $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\beta} \geq 0$

Pour montrer qu'elle est convergente il suffit de montrer qu'elle est bornée.

Posons $\alpha = \beta - 1$. On a $\beta = 1 + \alpha$

Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$. On a d'après 1)

$$\frac{1}{k^\beta} = \frac{1}{k^{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$$

Ainsi si $n \geqslant 2$

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\beta} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$$ somme télescopique

$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right]$$

$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha n^\alpha}$$

$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha}$$

On vient de prouver que S_n est bien bornée.

Ainsi S_n est croissante et bornée. Elle est donc convergente.