Exercice 32 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable avec I d'intérieur non vide et $(a,b) \in I^2$ et I intervalle. On suppose $f'(a) < f'(b)$ et on considère $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - \lambda x$$

1) La fonction g est continue, donc $g([a,b])$ est un segment $[m,M]$ et il existe $c \in [a,b]$ tel que $m = g(c)$.

Or $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} g(x)$. Il existe donc $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \inf\limits_{x\in[a,b]} g(x)$.

La fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - \lambda$.

Puisque $f'(a) < \lambda < f'(b)$ il vient $g'(a) < 0 < g'(b)$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que • si $x \in]a, a+\varepsilon[$

$$\frac{g(x)-g(a)}{x-a} < 0 \quad \text{et donc} \quad g(x) < g(a)$$

• si $x \in]b-\varepsilon, b[$

$$\frac{g(x)-g(b)}{x-b} > 0 \quad \text{et donc} \quad g(x) > g(b).$$

Par conséquent le minimum de $g_{[a,b]}$ n'est pas atteint en a et en b. Ainsi $c \in]a,b[$.

2) Si $x \in [a,c[$ $g(c) \leq g(x)$ donc

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \leq 0 \quad \text{et à la limite} \quad g'(c) \leq 0$$

Si $x \in]c,b]$ $g(c) \leq g(x)$ donc

$$\frac{g(x)-g(c)}{x-c} \geq 0 \quad \text{et à la limite} \quad g'(c) \geq 0$$

Ainsi $0 \leq g'(c) \leq 0$ et donc $g'(c) = 0$

Or $g'(c) = f'(c) - \lambda$. Par conséquent $f'(c) = \lambda$.

Ainsi si $a<b$ et si λ est compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ il existe c compris strictement entre a et b tel que $f'(c) = \lambda$
(si $f'(a) > f'(b)$ on peut faire le raisonnement en changeant des signes)

3) La fonction $\mathbb{1}_{[0,+\infty)}$ qui vaut 0 si $x<0$ et 1 sinon ne vérifie pas la propriété des valeurs intermédiaires. Elle ne peut donc être la dérivée d'une fonction. Elle n'admet pas de primitive $\frac{2}{2}$