Exercice 31 Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule pas sur $]a,b[$. On suppose que f^2 est dérivable. Montrons qu'alors f est dérivable.

Puisque f est continue sur l'intervalle $]a,b[$ et qu'elle ne s'annule pas elle est de signe constant (en effet s'il existe $c, d \in]a,b[$ tel que $f(c) < 0 < f(d)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $e \in]c,d[$ tel que $f(e) = 0$)

Soit donc $x \in]a,b[$. Alors quel que soit $y \in]a,b[$ $f(x)$ et $f(y)$ sont non nuls et de même signe donc $f(x) + f(y)$ est non nul.

Par conséquent $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \dfrac{f^2(x) - f^2(y)}{x - y} \times \dfrac{1}{f(x) + f(y)}$

Puisque f est continue $\lim\limits_{y \to x} f(y) = f(x)$ et puisque f^2 est dérivable $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{f^2(x) - f^2(y)}{x - y} = (f^2)'(x)$

Par conséquent $\lim\limits_{y \to x} \dfrac{1}{f(x) + f(y)} = \dfrac{1}{2f(x)}$ et

$$\lim_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = (f^2)'(x) \times \frac{1}{2f(x)}$$

On vient de prouver que f est dérivable en x

Comme f est dérivable en tout $x \in]a,b[$, f est bien dérivable.