Exercice 30

1) Si $\lambda \in [-1,1]$ la fonction f_λ est définie par $f_\lambda(x) = \ln(x^2 - 2\lambda x + 1)$
Son domaine de définition D_λ est formé des x pour lesquels $x^2 - 2\lambda x + 1$ est strictement positif car $\ln$ est définie sur $]0,+\infty)$.
Pour déterminer D_λ il faut étudier le signe de $x^2 - 2\lambda x + 1$.

Le discriminant du polynôme du second degré $x^2 - 2\lambda x + 1$ est
$4(\lambda^2 - 1) = \Delta_\lambda$

- Si $\lambda \in]-1,1[$ $\Delta_\lambda < 0$ et le polynôme $x^2 - 2\lambda x + 1$ est toujours strictement positif. Dans ce cas $D_\lambda = \mathbb{R}$.
- Si $\lambda = -1$ ou $\lambda = 1$ alors $\Delta_\lambda = 0$ et le polynôme $x^2 - 2\lambda x + 1$ est strictement positif sauf pour $x = \lambda$. Donc dans ce cas $D_\lambda = \mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ alors $\Delta_\lambda > 0$ et le polynôme $x^2 - 2\lambda x + 1$ admet deux racines distinctes $\alpha_\lambda = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et $\beta_\lambda = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$ et il est strictement positif en dehors des racines. Dans ce cas $D_\lambda = (-\infty, \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}[\cup]\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}, +\infty)$

Le calcul donne si $t \in \mathbb{R}$ et $\lambda + t \in D_\lambda$ alors $\lambda - t \in D_\lambda$
et $f_\lambda(\lambda + t) = \ln((1 - \lambda^2) + t^2) = f_\lambda(\lambda - t)$
Par conséquent si $(\lambda + t, f_\lambda(\lambda + t)) \in C_\lambda$ la courbe représentative de f_λ alors $(\lambda - t, f_\lambda(\lambda - t)) \in C_\lambda$. Ceci signifie que C_λ est symétrique par rapport à la droite $x = \lambda$.

2) * $\lambda \in]-1,1[$. Les variations de f_λ se déduisent de celles de $x^2-2\lambda x+1$ et de la stricte croissance de ln, ceci quelle que soit la valeur de λ.

x	$-\infty$		λ		$+\infty$
$x^2-2\lambda x+1$	$+\infty$	↘	$1-\lambda^2$	↗	$+\infty$
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$\ln(1-\lambda^2)$	↗	$+\infty$

* $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+1	$+\infty$		0		$+\infty$
$f_{-1}(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
x^2-2x+1	$+\infty$		0		$+\infty$
$f_1(x)$	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$

On pose $\alpha_\lambda = \lambda - \sqrt{\lambda^2-1}$ $\quad \beta_\lambda = \lambda + \sqrt{\lambda^2-1}$

	$-\infty$		α_λ	λ	β_λ		$+\infty$
$x^2-2\lambda x+1$	$+\infty$	↘	0 ‖	╳	‖ 0	↗	$+\infty$
$f_\lambda(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$ ‖	╳	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

3/ Soit $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Recherchons λ tel que $(x_0, f_\lambda(x_0)) = M_0$

Si λ est ainsi alors $x_0 \in D_\lambda$ et $\ln(x_0^2 - 2\lambda x_0 + 1) = y_0$

On a donc $x_0 \in D_\lambda$ et $x_0^2 - 2\lambda x_0 + 1 = \exp(y_0)$ et par conséquent $x_0^2 + 1 - \exp(y_0) = 2\lambda x_0$

On va répondre à la question par disjonction de cas.

1er cas $x_0 \neq 0$ Alors $M_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$ si et seulement si

$$\lambda = \frac{(x_0^2 + 1 - \exp(y_0))}{2x_0}$$

2ème cas $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Alors $M_0 = (0,0) \in \mathcal{C}_\lambda$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$

3ème cas $x_0 = 0$ et $y_0 \neq 0$. Alors l'équation que doit vérifier λ pour que $M_0 = (0, y_0) \in \mathcal{C}_\lambda$ soit vraie est

$0 \neq 1 - \exp(y_0) = 0.\lambda$. Cette équation n'admet pas de solution.

C'est pourquoi si $M_0(0, y_0)$ avec $y_0 \neq 0$ alors M_0 n'appartient à aucune courbe $\mathcal{C}_\lambda$.