Exercice 3

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$. On transforme u_n en $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}$

Or si $t \in]0,1[$ $0<(1-t)(1+t)=1-t^2<1$ et donc $1-t < \frac{1}{1+t} < 1$

aussi si $k \in \{0, \dots, n\}$ $0 < \frac{k}{n^2} < 1$ et donc $1-\frac{k}{n^2} < \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}} < 1$

de plus $\frac{k}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ et donc $1-\frac{1}{n} < \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}} < 1$

En sommant sur $k \in \{1, \dots, n\}$ il vient

$$1-\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right) < u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 = 1$$

Ainsi $1-\frac{1}{n} < u_n < 1$.

Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{+\infty} u_n = 1$

b) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^2+k}}$. On transforme u_n en $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$

Or si $k \in \{1, \dots, n\}$ $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

Donc $u_n \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$

Or $\lim_{+\infty} n = +\infty$ et $\lim_{+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$, donc

$\lim_{+\infty} \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = +\infty$ et puisque $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$, par comparaison

$$\lim_{+\infty} u_n = +\infty$$

c) $u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{n} k!$. On transforme u_n en $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 3$. Si $k \in \{1, \dots, n-2\}$ on a

$$0 \leqslant \frac{k!}{n!} = \frac{1}{(k+1)\dots n} \leqslant \frac{1}{(n-1)n}$$

En sommant sur $k \in \{1, \dots, n-2\}$ il vient

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{(n-1)n} = \frac{n-2}{(n-1)n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Par conséquent

$$1 \leqslant 1 + \frac{1}{n} \leqslant u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!} = \left(\sum_{k=1}^{n-2} \frac{k!}{n!} \right) + 1 + \frac{1}{n} \leqslant 1 + \frac{2}{n}$$

Par le théorème des gendarmes $\lim_{+\infty} u_n = 1$

d) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$. On transforme u_n en $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$ qui vaut $\ln(2)$. Donc par passage à la limite on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2)$

e) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n!}$

Vérifions tout d'abord que $n! \geqslant 2^n$ si $n \geqslant 4$. On le fait par récurrence sur n.

. la propriété est vraie au rang 4 car $2^4 = 16 \leqslant 24 = 4!$

. Elle est héréditaire. En effet soit $n \geqslant 4$ telle que

$$n! \geqslant 2^n \text{ ; alors } (n+1)! = (n+1)\, n! \geqslant 5\, n! \geqslant 5 \cdot 2^n \geqslant 2^{n+1}$$

Ceci prouve par récurrence que si $n \geqslant 4$ alors $n! \geqslant 2^n$

On en déduit que si $n \geqslant 4$

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^n}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^n} = 1$. Par conséquent

si $n \geqslant 4$ $\quad u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1$

Ceci prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car si $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0$.

Par conséquent, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, elle est convergente.

f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Puisque si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. De plus si $k \in \mathbb{N}$ et $k \geqslant 2$ on a

$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$. Par conséquent, si $n \geqslant 2$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée donc convergente.