Exercice 29 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et bornée

1) Soit $a \in \mathbb{R}$ On note $g_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

a) Pour montrer que la restriction de g_a à $]a, +\infty[$ est croissante il suffit de montrer que si $x, y \in]a, +\infty[$ et $x < y$ alors $g_a(x) \leq g_a(y)$

Soit donc $a < x < y$. On a $x = ta + (1-t)y$ avec

$t = \dfrac{y - x}{y - a}$.

Puisque f est convexe $f(x) \leq t f(a) + (1-t) f(y)$

et donc $f(x) \leq \dfrac{(y-x)}{(y-a)} f(a) + \dfrac{(x-a)}{(y-a)} f(y)$

Ainsi $f(x) - f(a) \leq \left(\dfrac{(y-x)}{(y-a)} - 1\right) f(a) + \dfrac{x-a}{y-a} f(y)$

$$f(x) - f(a) \leq \frac{x-a}{y-a} \left(f(y) - f(a)\right)$$

Puisque $x > a$ il vient en divisant par $x - a$

$$g_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} = g_a(y)$$

On a prouvé la croissance de g_a sur $]a, +\infty[$

Puisque g_a est croissante sur $]a, +\infty[$ g_a admet une limite réelle ou $+\infty$ en $+\infty$. On note l cette limite. Si $l \neq 0$ il existe $A > a$ et $K > 0$ tel que si $x > A$ alors $|g_a(x)| > K$

On a donc $\left| \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| > K$ si $x > A$

c'est à dire $|f(x)| > K|x - a| - |f(a)|$ si $x > A$

Puisque $K > 0$ $\lim_{+\infty} K|x-a| - |f(a)| = +\infty$ et par comparaison $\lim_{+\infty} |f(x)| = +\infty$. Ceci contredit le fait que f est bornée. Ainsi $\lim_{+\infty} g_a(x) = 0$

b) Puisque $\lim_{+\infty} g_a = 0$ et que g_a est croissante, la fonction g_a est à valeurs dans $]-\infty, 0]$ pour $x > a$:

si $x > a$ $g_a(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$

Ceci est vrai quels que soient $a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ $a < x$.

Ainsi le taux d'accroissement de f est toujours négatif ou nul. La fonction f est donc décroissante.

2) Soit $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $f(-x)$. Puisque f est bornée, $\hat{f}$ qui prend les mêmes valeurs l'est aussi. De plus si $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$ alors

$$\hat{f}(tx + (1-t)y) = f(-tx - (1-t)y) \leq t f(-x) + (1-t) f(-y) \text{ (f convexe)}$$

et donc $\hat{f}(tx + (1-t)y) \leq t \hat{f}(x) + (1-t)\hat{f}(y)$

Par conséquent $\hat{f}$ est bien convexe.

Puisque $\hat{f}$ est convexe bornée, d'après 1) b) $\hat{f}$ est décroissante. Or la décroissance de $\hat{f}$ est équivalente à la croissance de f. Donc f est croissante. Or d'après 1) b) elle est décroissante. Puisqu'elle est croissante et décroissante elle est constante.

2) En résumé toute fonction convexe et bornée sur $\mathbb{R}$ est constante