Exercice 28 Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ 1/2

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ avec $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

Montrons par récurrence sur n que $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$.

Plus précisément on veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété P_n suivante est vraie

(P_n) $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I^n \ \forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I \text{ et } f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

Initialisation. Au rang 1 on a $x_1 \in I$ $\lambda_1 \in [0,1]$ et $\lambda_1 = 1$

Donc $f(1.x_1) = f(x_1) \leq f(x_1) = 1.f(x_1)$ et P_1 vrai

. Au rang 2 puisque f est convexe on a bien

$\forall (x_1, x_2) \in I^2$ $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]^2$

$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Longrightarrow$
$\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ et
$\min(x_1, x_2) = \lambda_1 \min(x_1, x_2) + \lambda_2 \min(x_1, x_2) \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$
$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \leq \lambda_1 \max(x_1, x_2) + \lambda_2 \max(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2)$
Donc $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ entre x_1 et x_2 donc dans I
et $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$

Ainsi P_2 est vraie

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ tel que P_{n-1} soit vraie.

Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$

1er cas $\lambda_n = 1$ Dans ce cas $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = x_n \in I$

Ainsi $f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_n x_n\right) = f(\lambda_n x_n) = f(x_n) = \lambda_n f(x_n) \leq \lambda_n f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$

2e cas $\lambda_n \neq 1$ On pose $y_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k$

On a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k + \lambda_n x_n = (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k + \lambda_n x_n$
$= (1-\lambda_n) y_n + \lambda_n x_n$

Il vient $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} = 1$ et $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} \geq 0$ donc $y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k \in I$ puisque P_{n-1} est vraie

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_n x_n\right) = f\left((1-\lambda_n)y_n + \lambda_n x_n\right)$$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_n x_n = (1-\lambda_n)y_n + \lambda_n x_n \in I$ d'après P_2

$$" \leq (1-\lambda_n) f(y_n) + \lambda_n f(x_n)$$ car f convexe

$$" \leq (1-\lambda_n) f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right) + \lambda_n f(x_n) \qquad (*)$$

Or $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} = \frac{1}{1-\lambda_n} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k = \frac{1}{1-\lambda_n}(1-\lambda_n) = 1$$

Donc $$f\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} f(x_k)$$ puisque

P_{n-1} est supposée vraie

Cette dernière inégalité, combinée avec $(*)$ donne

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq (1-\lambda_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_n} f(x_k) + \lambda_n f(x_n)$$

$$" \leq \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k f(x_k) + \lambda_n f(x_n)$$

$$" \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \in I$

Les conclusions des cas 1 et 2 permettent d'obtenir l'hérédité : si P_{n-1} est vraie alors P_n est vraie

Puisque P_1 et P_2 sont vraies et que P_n est héréditaire, on peut conclure par le principe de récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.