Exercice 27 1) a) • Soit $f : x \mapsto e^{-x}$ défini sur $\mathbb{R}$. La fonction f est de classe C^∞ et $f'' = f$ est strictement positive. Puisque la dérivée seconde de f est strictement positive f est convexe strictement.

• Soit $g : x \mapsto |x|$ définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} g(tx+(1-t)y) &= |tx+(1-t)y| && \text{inégalité triangulaire} \\ &\leqslant |tx| + |(1-t)y| && \text{car } t, 1-t \geqslant 0 \\ &\leqslant t|x| + (1-t)|y| \\ &\leqslant t\,g(x) + (1-t)\,g(y). \end{aligned}$$

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \forall t \in [0,1] \quad g(tx+(1-t)y) \leqslant t\,g(x) + (1-t)\,g(y)$

Ceci signifie que la fonction g est convexe.

b) Soit $h : x \mapsto e^{-|x|}$ si $x \in \mathbb{R}$.

Alors $h(0) = e^{-0} = e^0 = 1$ et $h(1) = h(-1) = \dfrac{1}{e}$

Donc $\dfrac{1}{2}\big(h(1) + h(-1)\big) = \dfrac{1}{e} < 1 = h(0)$

[L'inégalité $\frac{1}{e} < 1$ résulte du fait que exp est strictement croissante et donc que $e = \exp(1) > \exp(0) = 1$]

Puisque $\dfrac{1}{2}\big(h(1) + h(-1)\big) < h(0)$

la condition de convexité est mise en défaut avec $x = -1$, $y = 1$ et $t = \frac{1}{2}$. La fonction h n'est pas convexe.

2) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexes et $h = f \circ g$.

a) Comme le montre la question 1) avec $f(x) = e^{-x}$ et $g(x) = |x|$

les fonctions f et g peuvent être convexes sans que la composée $f \circ g$ le soit.

b) On suppose f convexe et croissante et g convexe

Soit $x, y \in \mathbb{R}$ $t \in [0,1]$

$$g(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y) \text{ car } g \text{ convexe}$$

$$f(g(tx+(1-t)y)) \leq f(tg(x)+(1-t)g(y)) \text{ car } f \text{ croissante}$$

et $f(tg(x)+(1-t)g(y)) \leq t f(g(x)) + (1-t) f(g(y))$ car
(on applique la pté de convexité de f avec $g(x)$, $g(y)$ et $t \in [0,1]$)
f convexe. Les deux dernières inégalités impliquent

$$f(g(tx+(1-t)y)) \leq t f(g(x)) + (1-t) f(g(y))$$

Ainsi $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\forall t \in [0,1]$

$$f(g(tx+(1-t)y)) \leq t f(g(x)) + (1-t) f(g(y))$$

Ceci prouve que $f \circ g$ est convexe.

Conclusion : si f est convexe et croissante pendant que g est convexe alors la composée $f \circ g$ est convexe