Exercice 26 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue

1) Puisque f est uniformément continue si $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que si $x, y \in [0,+\infty[$ vérifient $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Ceci appliqué à $\varepsilon = 1$ donne $\eta_1 > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \ (|x-y| \leq \eta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq 1)$$

C'est ce qu'il fallait démontrer

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^+$.

2) Soit $n_0 = \min \{ n \in \mathbb{N}, \ n \geq \frac{x_0}{\eta_1} \}$. Un tel entier existe

car étant donné un réel, l'ensemble des entiers naturels supérieurs ou égaux à ce réel est non vide puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, donc $E = \{ n \in \mathbb{N}, \ n \geq \frac{x_0}{\eta_1} \}$ est non vide, et cet ensemble, comme tout sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Puisque $n_0 \in E$ on a $n_0 \geq \frac{x_0}{\eta_1}$ et donc $\frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$. De plus si $n \in \mathbb{N}$ vérifie $\frac{x_0}{n} \leq \eta_1$ alors $n \geq \frac{x_0}{\eta_1}$ et donc $n \in E$, ceci signifie que $n \geq n_0 = \min E$.

L'entier n_0 recherché existe bien et vaut $n_0 = \min \{ n \in \mathbb{N}, \ n \geq \frac{x_0}{\eta_1} \}$

Si $\frac{x_0}{\eta_1}$ est un entier alors $n_0 = \frac{x_0}{\eta_1}$, sinon $n_0 = 1 + \text{Partie entière}\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right)$.

3) On a $$f(x_0) - f(0) = \sum_{k=0}^{n_0-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right)$$

et donc on déduit de l'inégalité triangulaire

$$|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right|$$

4) D'après 1) si $k \in \{0, \dots, n_0-1\}$ $\left| f\left(\frac{(k+1)x_0}{n_0}\right) - f\left(\frac{kx_0}{n_0}\right) \right| \leq 1$

car $\left| \frac{(k+1)}{n_0} x_0 - \frac{k x_0}{n_0} \right| = \frac{x_0}{n_0} \leq \eta_1$

Ainsi $|f(x_0) - f(0)| \leq \sum_{k=0}^{n_0-1} \eta_1 = n_0$

et donc $|f(x_0)| \leq |f(0)| + n_0$

Or d'après 2) $n_0 = \frac{x_0}{\eta_1} \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$ si $\frac{x_0}{\eta_1} \in \mathbb{N}$

et $n_0 = \text{Partie entière}\left(\frac{x_0}{\eta_1}\right) + 1 \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$ sinon.

Dans tous les cas $n_0 \leq \frac{x_0}{\eta_1} + 1$

Ainsi $|f(x_0)| \leq |f(0)| + \frac{x_0}{\eta_1} + 1 = (|f(0)| + 1) + \left(\frac{1}{\eta_1}\right) x_0$

On vient de prouver que si $x_0 \in \mathbb{R}^+$ alors

$|f(x_0)| \leq a x_0 + b$

avec $a = \frac{1}{\eta_1}$ et $b = |f(0)| + 1$.