Exercice 25 Soit $a, b \in \mathbb{R}$ $a<b$ et $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit aussi $n \in \mathbb{N}^*$. Si $k \in \{0, \dots, n\}$ on pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

1) Puisque f est est continue sur $[a,b]$, c'est aussi le cas de la fonction $g=(b-a).f$ - Puisque $[a,b]$ est un segment, la continuité de g sur $[a,b]$ implique son uniforme continuité

C'est à dire

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists \eta>0 \; \forall (x,y) \in [a,b]^2 \; |x-y| \leq \eta \Rightarrow |g(x)-g(y)| \leq \varepsilon$$

Or $g=(b-a).f$ donc on a

$$\forall \varepsilon>0 \; \exists \eta>0 \; \forall (x,y) \in [a,b]^2 \; |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| = \frac{1}{b-a}|g(x)-g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

2) Soit $\varepsilon>0$. D'après 1) il existe $\eta>0$ telque si $(x,y) \in [a,b]^2$ vérifie $|x-y| \leq \eta$ alors $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ verifiant $N \geqslant \frac{b-a}{\eta}$ (prendre par exemple $1+$ partie entière de $\frac{b-a}{\eta}$)

Alors si $n \geqslant N$ et si $k \in [\![0, n-1]\!]$

on a $|x_{k+1}-x_k| = \frac{b-a}{n} \leqslant \frac{b-a}{N} \leq (b-a) \times \frac{\eta}{b-a} = \eta$

et donc si $t \in [x_k, x_{k+1}]$ alors $|t-x_k| \leqslant \eta$ et

donc $|f(t)-f(x_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$

On a donc montré que si $\varepsilon>0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ telque

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, \dots, n-1\} \; \forall t \in [x_k, x_{k+1}], \; |f(t)-f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$