Exercice 24

1) ▫ si $u,v \in \mathbb{R}$ alors $|u+v| \leq |u|+|v|$

En particulier si $x,y \in \mathbb{R}$ et si on pose $u=(x-y)$ et $v=y$

il vient $|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$, donc $|x|-|y| \leq |x-y|$

alors que si on pose $u=(y-x)$ et $v=x$

il vient $|y| = |(y-x)+x| \leq |x-y| + |x|$, donc $|y|-|x| \leq |x-y|$

Par conséquent $\big||x|-|y|\big| = \max(|x|-|y|, |y|-|x|) \leq |x-y|$

On a prouvé que si $x,y \in \mathbb{R}$ $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$

▫ Soit $\varepsilon > 0$. Soit $x,y \in \mathbb{R}$. On suppose $|x-y| < \varepsilon$

alors
$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{1+|x|} - \frac{1}{1+|y|}\right|$$
$$= \frac{\big||x|-|y|\big|}{(1+|x|)(1+|y|)}$$
$$\leq \big||x|-|y|\big| \quad \text{car } 1 \leq 1+|x| \text{ et } 1 \leq 1+|y|$$

et donc $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon$

Finalement $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ (prendre $\eta = \varepsilon$) tel que
$$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad |x-y| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \eta$$

Ceci signifie que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ est uniformément continue.

2) ▫ Soit $x,y \geq 0$.

Alors $x+y \leq x+y+2\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

Puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante l'inégalité
$$x+y \leq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$$

est prouvé par passage à la racine et on a donc

si $x,y \geqslant 0$ $\quad \sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}$

□ Soit $x,y \geqslant 0$

. Si $x \geqslant y$ on applique l'inégalité précédente à $x-y \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

et on obtient, puisque $x=(x-y)+y$

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{x-y}+\sqrt{y}$$

c'est à dire $\quad \sqrt{x}-\sqrt{y} \leq \sqrt{x-y}$

Or $\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{x}-\sqrt{y} \quad$ et $\quad |x-y| = x-y$.

On a donc bien $\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

. Si $y \geqslant x$ on applique l'inégalité précédente à $y-x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$

et on obtient, puisque $y=(y-x)+x$

$$\sqrt{y} \leq \sqrt{y-x}+\sqrt{x}$$

c'est à dire $\quad \sqrt{y}-\sqrt{x} \leq \sqrt{y-x}$

Or $\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \sqrt{y}-\sqrt{x} \quad$ et $\quad |x-y| = y-x$

On a donc bien $\quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

On a établi que si $x,y \geqslant 0$ alors $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|}$

□ Soit $g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x)=\sqrt{x}$.

Soit $\varepsilon>0$ et soit $\eta=\varepsilon^2$. Alors si $x,y \geqslant 0$ sont tels que $|x-y|<\eta=\varepsilon^2$ alors puisque $\sqrt{\ }$ est strictement croissante

$$|g(x)-g(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\eta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

On vient de prouver $\forall \varepsilon>0 \, \exists \eta>0 \, \forall x,y \geqslant 0 \; |x-y|<\eta \Rightarrow |g(x)-g(y)|<\varepsilon$

C'est l'uniforme continuité de g.