Exercice 23 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue telle que si $x>0$ $|f(x)|<x$.

- Si $x \in]0,+\infty[$ on a donc $0 \leq |f(x)| < x$

Par passage à la limite quand x tend vers, d'après le théorème des gendarmes et puisque $|f|$ est continue en 0

$$|f(0)| = \lim_{x\to 0} |f(x)| = 0 = \lim_{x \to 0} x$$

. Puisque $|f(0)| = 0$ c'est aussi le cas pour f $f(0)=0$

- Soit $0<a<b$.

Sur $[a,b]$ la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{|f(x)|}{x}$

est continue et à valeurs dans $[0,1[$ puisque si $x>0$

$0 \leq |f(x)| < x$ et donc $0 \leq \dfrac{|f(x)|}{x} < 1$.

Puisque g est continue sur le segment $[a,b]$, $g([a,b])$ est un segment de la forme $[l, k]$ et puisque $g([a,b]) \subset [0,1[$ le nombre k appartient à $[0,1[$.

Ainsi, il existe bien $k \in]0,1[$ tel que

$$|f(x)| \leq kx \text{ si } x \in [a,b]$$

(prendre le k précédent sauf si f est nulle identiquement sur $[a,b]$ où on prend n'importe quel $k \in]0,1[$)

- La fonction $f : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$

est telle que $|f(x)| < x$ si $x>0$ et elle

vérifie $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{|f(x)|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1+x} = 1$.

Par conséquent si $k \in]0,1[$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que

si $x \in]0,\varepsilon[$ $\dfrac{|f(x)|}{x} = \dfrac{1}{1+x} > \dfrac{1+k}{2} > k$.

Ceci répond par la négative à la dernière question