Exercice 22 Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$. 1/2

1er cas La fonction f est constante. Alors nécessairement elle est partout égale à sa limite finie l en $+\infty$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

2e cas La fonction f n'est pas constante. Il existe $a \neq b$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Par conséquent $f(a) \neq l$ ou $f(b) \neq l$. Quitte à permuter a et b on a $f(a) \neq l$. On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)-l|$

Puisque $\lim_{+\infty} f = l$ il existe $A > a$ tel que pour tout $x > A$

$$|f(x)-l| < \varepsilon \quad \text{et donc} \quad |f(x)| < |l| + \varepsilon$$

Ainsi sur $]A,+\infty[$ f est bornée

Puisque f est continue, $f([0,A])$ est un segment, f est bornée sur $[0,A]$ et il existe $M > 0$ tel que si $x \in [0,A]$ $|f(x)| \leq M$.

Si on pose $N = M + |l| + \varepsilon$ alors pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a $|f(x)| \leq N$. Ainsi f est bornée sur $[0,+\infty[$

Puisque $f([0,A])$ est un segment il existe $c,d \in [0,A]$ tels que $f([0,A]) = [f(c), f(d)]$. En particulier $f(c) \leq f(a) \leq f(d)$.

On a choisi A et ε de telle sorte que si $x > A$

$$|f(x)-l| < \varepsilon = \frac{1}{2}|f(a)-l|$$

1er cas $f(a) < l$ Alors

$$f(c) \leq f(a) < l - \varepsilon < f(x) \quad \text{si } x \in]A,+\infty[$$

Comme de plus $f(c) \leq f(x)$ si $x \in [0, A]$ il vient que pour tout $x \in [0, +\infty)$ $f(c) \leq f(x)$.

Ainsi $f(c)$ est la borne inférieure de f et elle est atteinte en c

2^e^ cas $f(a) > \ell$. Alors

$$f(x) < \ell + \varepsilon < f(a) \leq f(d) \text{ si } x > A$$

Comme de plus $f(x) \leq f(d)$ si $x \in [0, A]$ il vient que pour tout $x \in [0, +\infty)$ $f(x) \leq f(d)$.

Ainsi $f(d)$ est la borne inférieure de f et elle est atteinte en d