Exercice 21 • Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Supposons f injective et continue. Alors f est strictement monotone, par exemple strictement croissante. Alors $f\left(\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a\right) < f\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)$ car $\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a < \frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b$ et f strictement croissante.

De plus si f a une limite finie en a et en b, puisque f est strictement croissante $\lim\limits_{a^+} f \leq f\left(\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a\right)$ et $\lim\limits_{b^-} f \geq f\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}a\right)$. Puisque $f\left(\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}a\right) < f\left(\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}b\right)$ il vient $\lim\limits_{a^+} f < \lim\limits_{b^+} f$: les deux limites diffèrent.

Ainsi si $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue admet la même limite finie l en a et b alors f n'est pas injective.

• Seconde solution. Soit $f :]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui admet la même limite finie l en a et b. On note g la fonction $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(a)=g(b)=l$ et si $x \in]a,b[$ $g(x)=f(x)$. La fonction g est le prolongement par continuité de f sur $[a,b]$.

Soit $\lambda = \frac{1}{2}\left(l + g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$. Le nombre λ est entre $g\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $l = g(a) = g(b)$. Puisque g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]a, \frac{a+b}{2}[$ et $d \in]\frac{a+b}{2}, b[$ (donc $c \neq d$) tels que $g(c) = \lambda = g(d)$ c'est à dire $f(c) = f(d)$ et $c \neq d$. La fonction f n'est donc pas injective.