Exercice 20 On considère le mouvement d'un marcheur qui parcourt 10 km en 1 heure. On modélise la situation par une fonction continue f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ qui à $t \in [0,1]$ associe la distance $f(t)$ parcourue (en km) à l'instant t en heures.

1) Au début la distance parcourue est nulle : $f(0)=0$.
À la fin de l'heure 10 km ont été parcourus : $f(1)=10$.
Le problème consiste à déterminer s'il existe un intervalle d'une demie heure pendant lequel la distance parcourue est de 5 km. On cherche donc $t \in [0,1]$ tel que $t+0,5 \in [0,1]$ et tel que $f(t+0,5) - f(t) = 5$. Un tel t correspond à la situation recherchée : le marcheur parcourt 5 km pendant l'intervalle $[t, t+0,5]$.

2) Soit $g : [0,\frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t+\frac{1}{2}) - f(t)$.
Le problème consiste à trouver une solution à l'équation $g(t)=5$.
La fonction g est continue. On a $g(0) = f(\frac{1}{2})$ (car $f(0)=0$) et $g(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) = 10 - f(\frac{1}{2})$ (car $f(1)=10$). On a donc $g(0) + g(\frac{1}{2}) = 10$ et donc

$$(g(0)-5) = -(g(\tfrac{1}{2})-5).$$

Puisque ces deux nombres sont opposés soit $g(0) \leq 5 \leq g(\frac{1}{2})$ soit $g(\frac{1}{2}) \leq 5 \leq g(0)$. Dans tous les cas 5 est entre $g(0)$ et $g(\frac{1}{2})$ et puisque g est continue sur $[0,\frac{1}{2}]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t \in [0,\frac{1}{2}]$ tel que $g(t)=5$.
Ainsi $g(t)=5$ a une solution et il existe un intervalle d'une $\frac{1}{2}$ heure pendant lequel le marcheur parcourt exactement 5 km.