Exercice 2 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique positive et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

1) Soit $n\in\mathbb{N}$ puisque $u_n \geq 0$ on a $0 \leq u_n < 1+u_n$

et donc $0 \leq v_n = \frac{u_n}{1+u_n} < 1$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par 0 et majorée par 1.
Elle est bornée.

2) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque la suite est croissante $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$

Or $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{(1+u_n)-1}{1+u_n} = 1 - \frac{1}{1+u_n}$

et $v_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+u_{n+1}}$

On déduit de $0 \leq u_n \leq u_{n+1}$ que $1 \leq 1+u_n \leq 1+u_{n+1}$

puis que $0 \leq \frac{1}{1+u_{n+1}} \leq \frac{1}{1+u_n}$ et donc

que $v_{n+1} = 1 - \frac{1}{1+u_{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{1+u_n} = v_n$ si $n\in\mathbb{N}$

Ceci signifie que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi.

3) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Soit l sa limite.
Puisque la suite est positive la limite l aussi
Puisque $v_n = 1 - \frac{1}{1+u_n}$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la

suite image de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la fonction continue définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}$.

Puisque $l \geqslant 0$, $l \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, donc f est continue en l.

Ceci implique que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et sa limite est $f(l)$ où $l = \lim\limits_{+\infty} u_n$.

4) Ce n'est pas parce que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple si $u_n = n$ lorsque $n\in\mathbb{N}$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\underline{1}$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.