Exercice 10 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$

1) a) Soit $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - x$

Puisque f est continue ainsi que x, la fonction g aussi.

On a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $a \leq f(a) \leq b$

$g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $a \leq f(b) \leq b$

Par conséquent $g(b) \leq 0 \leq g(a)$ et puisque g est continue il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires). Puisque $0 = g(c) = f(c) - c$ on vient de prouver qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$

b). Si f est strictement décroissante alors g l'est car c'est la somme de f et de $-x$ qui sont strictement décroissantes. La fonction g étant strictement décroissante, elle est injective et donc elle ne peut s'annuler qu'une fois au plus. Or les points fixes de f sont les zéros de g. Donc la stricte décroissance de f garantit l'unicité du point fixe.

. En revanche si f est strictement croissante elle peut avoir plusieurs points fixes. C'est le cas de $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ qui à x associe x (l'identité de $[0,1]$). Elle compte une infinité de points fixes.

2) Soit $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2)$. Soit g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = f(x) - f(x+1)$. Puisque f est continue, g l'est aussi. On a $g(0) = f(0) - f(1) = f(2) - f(1) = -g(1)$

Ainsi g prend des valeurs opposées en 0 et 1. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $g(c) = f(c) - f(c+1) = 0$. Le nombre c est une solution de l'équation $f(x) = f(x+1)$.