Exercice 18

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $E=\{x\in[a,b],\ f(x)=0\}$ non vide.

Soit $M=\sup E$. Ce nombre existe car E est un sous ensemble non vide et borné par b de $\mathbb{R}$.

Puisque $M=\sup E$ il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui tend vers M.

On a $\lim\limits_{+\infty} x_n = M$

Comme $E\subset[a,b]$ $M=\sup E\in[a,b]$.

Puisque f est continue en M et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments du domaine de définition de f qui tend vers M, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(M)$

Or pour tout n $x_n\in E$ et donc $f(x_n)=0$. Ainsi

$f(M)=\lim\limits_{+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{+\infty} 0 = 0$ et $M=\sup E\in E$