Exercice 17 Soit $k \in \mathbb{R}$ tel que $k>0$ et $k \neq 1$.
On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue à l'origine et qui vérifie pour tout réel x $f(kx) = f(x)$ $(*)$

Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(k^n x) = f(x)$ $(*_n)$
La démonstration se fait par récurrence.
Initialisation. C'est vrai au rang $n=0$ car on a bien
$$f(k^0 x) = f(1.x) = f(x)$$ ce qui prouve $(*_0)$
Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $(*_n)$ vrai.
Alors $f(k^{n+1}x) = f(k(k^n x)) \underset{\text{d'après } (*)}{=} f(k^n x) \underset{\text{d'après } (*_n)}{=} f(x)$

On a donc $(*_{n+1})$ vrai.

Vérifions que $\forall n \in \mathbb{N}$ $f(\frac{1}{k^n}x) = f(x)$.
Il suffit d'appliquer $(*_n)$ avec $\frac{1}{k^n}x$.
On a $f(x) = f((k^n \frac{1}{k^n})x) = f(k^n(\frac{1}{k^n}x)) \underset{\text{d'après } (*_n)}{=} f(\frac{1}{k^n}x)$

Soit $x \in \mathbb{R}$ Si $0<k<1$ alors $k^n x \to 0$ et puisque f est continue en 0 on obtient $f(x) \underset{(*_n)}{=} f(k^n x) = f(0)$ par passage à la limite. Si $k>1$ alors $\frac{1}{k^n}x \to 0$ et puisque f est continue en 0 on obtient $f(x) = f(\frac{1}{k^n}x) = f(0)$ par passage à la limite. Dans tous les cas on a $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = f(0)$.
La fonction f est donc constante.