

Exercice 16

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période $t > 0$ et telle que
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ existe ($l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)

Montrons que f est constante.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

avec $u_n = x + nt$ si $n \in \mathbb{N}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Par conséquent $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = l$

Or f est t -périodique et si $n \in \mathbb{N}$ $u_n - x = nt$
donc $f(x) = f(u_n)$.

Par conséquent la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est constante
égale à $f(x)$ et comme elle tend vers l on a
 $f(x) = f(l)$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = l$. La fonction f est constante.