Exercice 15

Préliminaire . On établit les inégalités $1 < \ln(5) < 2$

Soit $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{1}{t}$. La fonction g est dérivable de dérivée g' définie par $g'(t) = -\frac{1}{t^2}$. Cette dérivée est strictement négative et strictement croissante. La fonction g est donc convexe strictement et décroissante strictement.

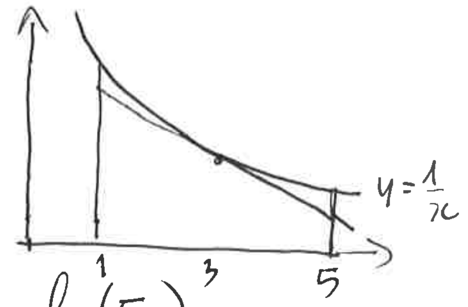
• Ainsi si $x, y \in]0,+\infty[$ et $x \neq y$,

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y^2}(x-y) < \frac{1}{x},$$

c'est à dire le graphe de g est strictement dessus ses tangentes, sauf pour chaque tangente, au point de tangence.

En particulier si $x \in [1,5]$ et $x \neq 3$ on a

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3) < \frac{1}{x}$$



En intégrant entre 1 et 5 il vient

$$1 < \frac{4}{3} = \int_1^5 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-3)\right) dx < \int_1^5 \frac{1}{x}\, dx = \ln(5)$$

c'est à dire $1 < \ln(5)$.

• De plus si $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$ on a pour tout $x \in]n, n+1[$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{n+1}(x-n) + \frac{1}{n}(n+1-x)$$

c'est à dire le graphe de g est strictement sous ses cordes sauf pour chaque corde, en ses extrémités (ici les abscisses des extrémités sont des entiers successifs)

En intégrant entre n et $n+1$ il vient

$$\ln(n+1)-\ln(n)=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\,dx<\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}(x-n)+\frac{1}{n}(n+1-x)\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$

Or $\ln(5)=(\ln(5)-\ln(4))+(\ln(4)-\ln(3))+(\ln(3)-\ln(2))+(\ln(2)-\ln(1))$

Par conséquent en sommant pour $n\in\{1,2,3,4\}$ l'inégalité précédente donne

$$\ln(5)<\frac{1}{2}\left(1+2\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)=\frac{202}{120}<2$$

c'est à dire $\ln(5)<2$

On vient d'établir que $1<\ln(5)<2$ □

a) Si $t,s\in\mathbb{R}$ $|\cos(t)-\cos(s)|=\left|2\sin\left(\frac{s-t}{2}\right)\sin\left(\frac{s+t}{2}\right)\right|$ or $\begin{cases}|\sin(u)|\leq|u|\ \forall u\in\mathbb{R}\\ |\sin(u)|\leq 1\end{cases}$

donc en posant $\frac{s-t}{2}=u$ on obtient

$$|\cos(t)-\cos(s)|\leq 2\left|\frac{s-t}{2}\right|=|s-t| \quad (*)$$

Soit $x_0=\ln(5)$ et soit $\eta_1=0{,}005$. On déduit de l'inégalité précédente que si $x\in\mathbb{R}$ et $|x-\ln(5)|<0{,}005$ alors $|\cos(x)-\cos(x_0)|<0{,}005$

[Remarque On peut montrer $(*)$ en utilisant le fait que la dérivée de cos est $-\sin$. En effet d'après le théorème des accroissements finis il existe u compris entre t et s tel que

$$\cos(t)-\cos(s)=\cos'(u)(t-s).$$

Puisque $|\cos'(u)|=|\sin(u)|\leq 1$ il vient

$$|\cos(t)-\cos(s)|\leq|t-s| \text{ qui est bien } (*)]$$

b) Si $t,s\in\mathbb{R}$ alors $t^4-s^4=|t^3+t^2s+ts^2+s^3|\,|t-s|$

Soit $\eta_2=\frac{0{,}005}{108}$

Soit $x\in\mathbb{R}$. On suppose $|x-x_0|<\eta_2$ c'est à dire

$$|x-x_0|=|x-\ln(5)|<\frac{0{,}005}{108}$$

On a donc $\ln(5) - \frac{0{,}005}{108} < x < \ln(5) + \frac{0{,}005}{108}$

Puisque $1 < \ln(5) < 2$ et que $\frac{0{,}005}{108} < 1$ il vient $0 < x < 3$
et $0 < x_0 < 3$

Par conséquent $|x^4 - x_0^4| = |x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3|\,|x - x_0|$

$$\leq 4.3^3\,|x - x_0| < 108 \times \frac{0{,}005}{108} = 0{,}005$$

Ainsi si $x_0 = \ln(5)$ et $\eta_2 = \frac{0{,}005}{108}$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que
$|x - x_0| < \eta_2$ $\quad |x^4 - x_0^4| < 0{,}005$

c) Soit $f : x \longrightarrow \cos(x) + x^4$ et $x_0 = \ln(5)$

On pose $\eta = \eta_2$. On a $\eta = \eta_2 = \frac{0{,}005}{108} < \eta_1$. Par conséquent
si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - x_0| < \eta_2 < \eta_1$ on a donc

$$|f(x) - f(x_0)| = |(\cos(x) - \cos(x_0)) + (x^4 - x_0^4)|$$
$$\leq |\cos(x) - \cos(x_0)| + |x^4 - x_0^4|$$
$$< 0{,}005 + 0{,}005 = 10^{-2}$$

Ainsi si $x \in \mathbb{R}$ et $|x - \ln(5)| < \frac{0{,}005}{108}$ alors $|f(x) - f(\ln 5)| < 10^{-2}$