

Exercice 14

Soit $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3 \sin^3(x) - x^2 \cos^2(x) + x \sin x - 3}{x^2 \cos(x) + 20}$$

Si $x \in [1, 4]$ alors $|x| \leq 4$, $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ et donc

$$|x^3 \sin^3(x) - x^2 \cos^2(x) + x \sin(x) - 3| \leq |x^3| |\sin^3(x)| + |x^2| |\cos^2(x)| + |x| |\sin(x)| + 3$$

$$\leq 1 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 1 \times 4 + 3 = 87$$

De plus $|x^2 \cos(x)| \leq 1 \times 4^2 = 16$ c'est à dire

$$-16 \leq x^2 \cos(x) \leq 16$$

ce qui implique

$$4 = -16 + 20 \leq x^2 \cos(x) + 20 \leq 16 + 20 = 36$$

Par conséquent si $x \in [1, 4]$

$$-87 \leq x^3 \sin^3(x) - x^2 \cos^2(x) + x \sin(x) - 3 \leq 87$$

$$\text{et } -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{x^2 \cos(x) + 20} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Ainsi } -22 \leq \frac{-87}{4} \leq f(x) \leq \frac{87}{4} \leq 22$$

On pose $a = -22$ et $b = 22$. On a bien

$$-22 \leq f(x) \leq 22 \quad \text{si } x \in [1, 4].$$