Examen 13

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 et $\varepsilon>0$.

Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que si $n\geq n_0$ $|u_n|<\varepsilon$ (convergence vers 0)

On a alors $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_n\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=n_0}^{n}|u_n| < \frac{1}{n}\sum_{n_0+1}^{n}\varepsilon = \frac{n-n_0}{n}\varepsilon\leq\varepsilon$$

si $n\geq n_0 + 1$.

Or $$\frac{1}{n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_n = v_n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k \text{ si}$$

on a posé $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Donc on a si $n\geq n_0$ $$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k - v_n\right|<\varepsilon$$

c'est à dire
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right)-\varepsilon < v_n < \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right)+\varepsilon$$

Soit $M=\max|u_k|$ (Maximum existe puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0).

Soit $n\geq n_0$ et $n>\frac{n_0 M}{\varepsilon}$, c'est à dire $n\geq N_0$ où

$N_0=\frac{n_0 M}{\varepsilon}$ alors on a de plus $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k\right|<\varepsilon$

et finalement $-2\varepsilon\leq v_n\leq 2\varepsilon$

Ainsi si $\varepsilon>0$ il existe N_0 tel que si $n\geq N_0$ $-2\varepsilon\leq v_n\leq 2\varepsilon$

Ceci prouve que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

2/ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers ℓ. Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ tend aussi vers ℓ

En effet. On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $U_n = u_n - \ell$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$V_n = v_n - \ell = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} U_k$. Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
Puisque $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 on a d'après 1/ que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0. Or $v_n = V_n + \ell$ $\forall n\in\mathbb{N}$
Par conséquent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers ℓ.

3/ La réciproque est fausse.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \ell + (-1)^n$.

On a $v_n = \ell + \frac{1}{n}$ si n pair
$v_n = \ell$ si n impair

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = \ell$. En revanche la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas