Exercice 12

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $n \geq p$ on pose $v_n = \frac{1}{2^n}\binom{n}{p}$

On a $v_n \geq 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2(n-p+1)}$

Si $n \geq 3p$ alors $n-p+1 \geq \frac{2n}{3} + 1 \geq \frac{2}{3}(n+1)$

et donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq \frac{3}{4}$ $(*)$

On montre par récurrence que si $n \geq 3p$ alors

$$0 \leq v_n \leq v_{3p}\left(\frac{3}{4}\right)^{-3p} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

[initialisation au rang $n=3p$ et si valable à un rang $n \geq 3p$ fixé alors d'après $(*)$ $0 \leq v_{n+1} \leq v_n\left(\frac{3}{4}\right) \leq v_{3p}\left(\frac{3}{4}\right)^{-3p} \times \underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)}_{\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}$]

Puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ il vient que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$

2) Soit $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de réels qui tend vers 0.

Puisque $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 il existe M qui majore toute $|u_p|$

et si $\varepsilon > 0$ il existe un rang K_ε tel que si $p \geq K_\varepsilon$ alors $|u_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ et K_ε comme ci-dessus. Choisissons $n \geq K_\varepsilon + 1$

On sait que si $p = 0, \ldots, n$ $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ et $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$

Donc $\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p} \leq 2^n$ si $k = K_\varepsilon, \ldots, n-1$.

Par conséquent $\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}\leq 1$ si $k_\varepsilon=k_\varepsilon,\dots,n-1$

et $$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}|u_p|$$ (car si $p=k+1,\dots,N$ $p\geq k_\varepsilon$ et donc $|u_p|<\frac{\varepsilon}{2}$)

$$<\frac{1}{2}\sum_{p=k+1}^{n}\binom{n}{p}\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}$$

Puisque à p fixé $\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right)_{n\geq 0}$ tend vers 0, il existe un rang N qu'on peut prendre supérieur à $k_\varepsilon+1$ tel que si $n\geq N$ et si $p=0,\dots,k_\varepsilon$ alors

$$\left|\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right|<\frac{\varepsilon}{2(k_\varepsilon+1)M}$$

Par conséquent si $n\geq N$ on a

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{K_\varepsilon}\binom{n}{p}u_p\right|\leq\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{K_\varepsilon}\binom{n}{p}|u_p|$$

$$<\sum_{p=0}^{K_\varepsilon}\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}M \quad \text{car } |u_p|<M$$

$$<\sum_{p=0}^{K_\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2(k_\varepsilon+1)M}M=\frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement si $n\geq N$ alors

$$\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|\leq\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k_\varepsilon}\binom{n}{p}u_p\right|+\left|\frac{1}{2}\sum_{p=k_\varepsilon+1}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

Donc $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\in\mathbb{N}\ n\geq N\Rightarrow\left|\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p\right|<\varepsilon$

Ceci montre que $\frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}u_p$ tend vers 0.