Exercice 11 On a vu dans l'exercice 3 question e) que la suite de terme général $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ était convergente. Il en est donc de même pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On note e sa limite : $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ 1/2

Supposons e rationnel. Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $e = \frac{p}{q}$

Soit u la suite de terme général $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et soit v la suite de terme général $v_n = u_n + \frac{1}{n\, n!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$

$$\text{et } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$= \frac{n - (n+1)^2 + n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

De plus la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $\left(\frac{1}{n\, n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et elle est donc convergente de limite 0. Ceci signifie que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et donc convergentes de même limite. Cette limite est e. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante il vient $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n < e < v_n$. C'est vrai en particulier pour $n = q$:

$$u_q < e < v_q$$

Puisque $e = \frac{p}{q}$ il vient

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q\,q!}$$

En multipliant par $q\,q!$ il vient

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} < p\,q! < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} + 1$$

Or $p\,q! \in \mathbb{N}$ et si $k \in \{0, \dots, q\}$

$$\frac{q!}{k!} = (k+1) \cdots q \in \mathbb{N} \quad \text{et donc} \quad A = \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$$

Finalement il vient $A < p\,q! < A+1$ et donc l'entier $p\,q!$ est strictement compris entre deux entiers successifs. Ceci est impossible. Par conséquent l'hypothèse e rationnel est erronée. Le nombre $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ n'est pas un rationnel.