Exercice 10 Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

Soit $n\geq 1$. On a $a_{2n}-a_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}$

Or si $k\in\{n+1,\dots,2n\}$ alors $k\leq 2n$

et donc $\frac{1}{k}\geq\frac{1}{2n}$

Ainsi $a_{2n}-a_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$

Montrons que a ne converge pas maintenant qu'on a établi que si $n\geq 1$ $a_{2n}-a_n\geq\frac{1}{2}$

Raisonnons par l'absurde. On suppose a convergente. Soit donc l sa limite. Soit $\varepsilon=\frac{1}{4}$. Il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que si $m\in\mathbb{N}$ et $m>N$ alors $|a_m-l|<\varepsilon=\frac{1}{4}$

Soit donc $n>N$. On a donc $2n>N$ et par conséquent

$$|a_{2n}-a_n|\leq|a_{2n}-l|+|a_n-l|<\varepsilon+\varepsilon=\frac{1}{2}$$

et donc $a_{2n}-a_n<\frac{1}{2}$. Or $n>0$ car $n>N\in\mathbb{N}$

Ça contredit l'inégalité $a_{2n}-a_n\geq\frac{1}{2}$.

On a prouvé par l'absurde que la suite de terme général $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ ne converge pas.