Exercice 1

a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

On transforme u_n en $u_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \dfrac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Or $\lim_{+\infty} \sqrt{n} = \lim_{+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$ donc $\lim_{+\infty} (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = +\infty$

et $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

b) $u_n = \dfrac{n + (-1)^n}{n + \ln(n)}$

On transforme u_n en $\quad u_n = \dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{1 + \frac{\ln(n)}{n}} \quad (i)$

D'une part $\lim_{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$ donc $\lim_{+\infty} 1 + \dfrac{(-1)^n}{n} = 1 \quad (ii)$

D'autre part on a $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$ et par conséquent, puisque $\frac{1}{x} \leqslant 1$ si $x \geqslant 1$. et que $1 = x'$ il vient $\quad \ln(x) - \ln(1) \leqslant x - 1 \leqslant x$ si $x \geqslant 1$

c'est à dire $0 \leqslant \ln(x) \leqslant x$ si $x \geqslant 1$

De plus $\quad \ln(x) = \ln(\sqrt{x}^2) = 2\ln(\sqrt{x})$ et donc

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2\ln(\sqrt{x})}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim_{+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ il vient $\lim_{+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n}} = 0$ et, par le théorème des gendarmes, $\lim_{+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$

et donc $\lim_{+\infty} 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} = 1 \;.(iii)$

On déduit de (i), (ii) et (iii) que $\lim\limits_{+\infty} u_n = 1$.

c) $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ $a>0$ et $b>0$

- si $a=b$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle.
- si $a>b$ alors on transforme u_n en $u_n = \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^n}$.

et puisque $0<\left(\frac{b}{a}\right)<1$ il vient $\lim\limits_{+\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n = 0$

et donc $\begin{cases} \lim\limits_{+\infty} 1-\left(\frac{b}{a}\right)^n = 1 \\ \lim\limits_{+\infty} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n = 1 \end{cases}$

On en déduit que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \underline{1}$

d) $u_n = \dfrac{n^2 + \cos(n)}{2^n + \sin(n)}$

* On va d'abord montrer de façon directe (sans utiliser l'exponentielle ou le logarithme) que $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n} = 0$

1. Soit $a>0$. Vérifions par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ que $(1+a)^n \geq 1+na$.

- On vérifie cette propriété au rang $n=0$. On a bien $(1+a)^0 = 1 \geq 1+0a = 1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose $(1+a)^n \geq 1+na$ et montrons que ceci entraîne $(1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a$.

On a $(1+a)^{n+1} = (1+a)^n (1+a) \geqslant (1+na)(1+a)$ par hypothèse et donc

$$(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a + na^2 \geqslant 1+(n+1)a$$

car $na^2 \geqslant 0$. C'est l'inégalité $(1+a)^{n+1} \geqslant 1+(n+1)a$ recherchée.

On a prouvé que la propriété recherchée était vraie au rang 0 et qu'elle était héréditaire. Par le principe de récurrence elle est vraie pour tout n.

2/ Soit $a = \frac{1}{4}$. On a $\left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{64} = 1 + \frac{61}{64} \leqslant 2$

On a donc d'après 1/

$$2^n \geqslant \left(1+\frac{1}{4}\right)^{3n} \geqslant \left(1+\frac{n}{4}\right)^3 \geqslant \left(\frac{n}{4}\right)^3 \geqslant 0$$

et donc $\quad \frac{64}{n} \geqslant \frac{n^2}{2^n} \geqslant 0 \quad$ si $n \in \mathbb{N}^*$

3/ Puisque $\lim\limits_{+\infty} \frac{64}{n} = 0$, la double inégalité précédente implique d'après le théorème des gendarmes que

$$\lim_{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

* On transforme u_n en $u_n = \frac{n^2}{2^n} \dfrac{1+\frac{\cos(n)}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{2^n}}$

Puisque $0 \leq |\cos(n)|, |\sin(n)| \leq 1$ il vient

$$0 \leq \left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \left|\frac{\sin(n)}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

et puisque $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ on obtient

par le théorème des gendarmes que

$$\lim_{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^2} = \lim_{+\infty} \frac{\sin(n)}{2^n} = 0 \quad \text{et}$$

donc $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1+\frac{\cos(n)}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{2^n}} = 1$

Par conséquent, puisque $u_n = \dfrac{n^2}{2^n} \dfrac{1+\frac{\cos(n)}{n^2}}{1+\frac{\sin(n)}{2^n}}$

et que $\lim\limits_{+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ on a

$$\lim u_n = 0$$

e) $u_n = \prod\limits_{p=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$. Montrons par récurrence que $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \geq 2$

C'est vrai au rang $n=2$ $u_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. On suppose $u_n = \frac{1}{n}$. Alors

$$u_{n+1} = \prod_{p=2}^{n+1}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \left(\prod_{p=2}^{n}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right) \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = u_n \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

La propriété annoncée est vraie au rang 2 et elle est héréditaire. Elle est donc vraie si $n \geq 2$ d'après le principe de récurrence

Puisque $u_n = \frac{1}{n}$ si $n \geq 2$ on a $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$