Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

MEEF PLC Maths
2023-2024

Suites et séries de fonctions

version provisoire de 6 septembre 2023

L'objet de ces notes est de permettre de réviser des notions autour des suites et des séries de fonctions.

On essaiera d'aborder les points du programme du capes de maths qui concernent ces thèmes à savoir : *Convergence simple, convergence uniforme. Théorèmes de régularité. Convergence normale des séries de fonctions. Séries entières, rayon de convergence. Développement en série entière des fonctions usuelles.*

1 Suites numériques

On désigne par $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels et par $\mathbf{R}$ celui des nombres réels.

Propriété 1 Tout sous-ensemble non vide de $\mathbf{N}$ admet un plus petit élément et, s'il est majoré, un plus grand élément.

Propriété 2 L'ensemble des réels est archimédien. Ceci signifie que pour $y \in \mathbf{R}$ et pour $x \in \mathbf{R}$, si $x > 0$ il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $y < nx$. Ceci implique l'existence de la fonction partie entière.

Propriété 3 L'ensemble des réels possède la propriété de la borne supérieure (et de la borne inférieure). Ceci signifie que tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbf{R}$ possède un plus petit majorant : si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{R}$ alors

$$(\exists K \in \mathbf{R}\ \forall x \in E\ x \leq K) \Longrightarrow (\exists M \in \mathbf{R}\ (\forall x \in E\ x \leq M) \text{ et } (\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in E \cap]M-\varepsilon, M])).$$

Définition 1 On appelle suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une fonction u de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

Définition 2 Soit $l \in \mathbf{R}$. Une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente de limite l si quel que soit le réel strictement positif $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel les termes de la suite u sont distants de strictement moins de ε du réel l :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

Exemple 1 Soit $r \in [0,1]$. On considère la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = r^n$, c'est à dire définie par récurrence par $u_0 = 1$ et si $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = r \times u_n$. Si $r \in [0,1[$ la suite u est convergente de limite 0 et si $r = 1$ la suite u est convergente de limite 1.

Exemple 2 Si $r \in [0,1[$ la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

et elle est convergente de limite
$$l = \frac{1}{1-r}.$$

Définition 3 Une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite convergente s'il existe un réel l tel que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Propriété 4 Si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente il existe un unique réel l tel que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Propriété 5 Si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente alors elle est bornée.

Exemple 3 Si $r \in \mathbf{R}$ vérifie $|r| > 1$ alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente.

Définition 4 Une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est dite de Cauchy si quel que soit le réel strictement positif $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel les termes de la suite u sont deux à deux distants de strictement moins de ε :
$$\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n,m \in \mathbf{N}\ (n,m \geq N \Longrightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon).$$

Théorème 1 Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Théorème 2 (de Bolzano Weierstrass) Soit E un segment et $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels contenus dans E. Alors il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbf{N}}$ convergente de limite un réel appartenant à E.

Définition 5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique. On pose
$$i_n = \inf\{u_k : k \geq n\} \text{ et } s_n = \sup\{u_k : k \geq n\} \text{ si } n \in \mathbf{N}.$$
Les deux suites $(i_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, la suite $(i_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante alors que la suite $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et si $n \in \mathbf{N}$ alors $i_n \leq u_n \leq s_n$. Les deux suites $(i_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admettent donc des limites i et s finies ou infinies, qui vérifient $i \leq s$ et qui sont appelées limites inférieure et supérieure de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$:
$$\liminf(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = i = \lim(i_n)_{n\in\mathbf{N}} \leq \lim(s_n)_{n\in\mathbf{N}} = s = \limsup(u_n)_{n\in\mathbf{N}}.$$

Proposition 1 Une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite si et seulement si ses limites inférieure et supérieure sont égales, c'est à dire si et seulement si $\liminf(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \limsup(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et alors les trois limites sont égales : $\liminf(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \lim(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = \limsup(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exemple 4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n \times (1 + \frac{1}{n+1}.)$ Alors
$$\liminf(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = -1,\ \limsup(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = 1$$
et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

2 Suites de fonctions numériques. Convergences simple et uniforme

Définition 6 On appelle suite de fonctions (numériques de la variable réelle) une famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions numériques de la variable réelle toutes définies sur le même ensemble de départ E qui est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$: il existe $E \subset \mathbf{R}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n : E \to \mathbf{R}$ est une fonction numérique définie sur E.

Exemple 5 Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. La famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions numériques.

Définition 7 Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie également sur E. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f si quel que soit $x \in E$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(x)$ c'est à dire si quel que soit le réel x de E et quel que soit le réel strictement positif $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel les termes de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ sont distants de strictement moins de ε du réel $f(x)$:

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Exemple 6 Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. On note aussi $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f.

Définition 8 Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie également sur E. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f si quel que soit le réel strictement positif $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbf{N}$ à partir duquel, quel que soit le réel x de E, les termes de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ sont distants de strictement moins de ε du réel $f(x)$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall x \in E\ \forall n \in \mathbf{N}\ (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon).$$

Exemple 7 Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. On note aussi $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f.

Définition 9 Soit $E \subset \mathbf{R}$ et $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction numérique de la variable réelle. On dit que f est continue si f est continue en tout point a de E c'est à dire si

$$\forall a \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in E\ \left(|x-a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\right).$$

Exemples 8 Les fonctions rationnelles, les fonctions trigonométriques, l'exponentielle, le logarithme, les sommes, produits et composées de fonctions continues ainsi que les réciproques de fonctions continues injectives sont continues.

Théorème 3 Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie également sur E. Si pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n est continue et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f alors f est continue.

Exemple 9 Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels bornée (il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $|a_n| \leq K$). Alors pour tout $x \in]-1,1[$ il existe un réel $f(x)$ tel que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$$

est une suite convergente de limite $f(x)$ et la fonction f ainsi définie sur $]-1,1[$ est une fonction continue.

Remarque 1 Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur E. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniformément de Cauchy. Ceci signifie que

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall x \in E\ \forall n,m \in \mathbf{N}\ (n,m \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon).$$

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : E \to \mathbf{R}$ qui est donc continue.

Théorème 4 (de Dini (1)) Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur E et soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie également sur E. Si E est un segment, si pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n est croissante, si la fonction f est continue et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers f alors la suite converge uniformément vers f.

Théorème 5 (de Dini (2)) Soit $E \subset \mathbf{R}$, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur E et soit $f : E \to \mathbf{R}$ une fonction continue définie également sur E. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante, c'est à dire qui est telle que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in E$ alors $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$, et si elle converge simplement vers f alors la suite converge uniformément vers f.

Exercice 1 (d'après Quercia) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^{\alpha}x(1-x)^n$.

Exercice 2 (d'après Quercia) On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n\sin(\pi x)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) En déduire qu'il en est de même pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (on peut utiliser la concavité de sin sur $[0,\pi]$).

Exercice 3 Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction affine par morceaux définie sur $[0,1]$ de la façon suivante. Si $k \in \mathbf{N}$ et $k < 2^n$ alors la restriction de f à $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ est affine. Si $x \in [0,1]$ est de la forme $x = \frac{2m+1}{2^q}$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ et inférieur ou égal à n alors $f_n(x) = \frac{1}{2^q}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge simplement mais pas uniformément vers la fonction f définie de la façon suivante. Si $x \in [0,1]$ est de la forme $x = \frac{2m+1}{2^q}$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ alors $f(x) = \frac{1}{2^q}$ et si x n'est pas de cette forme $f(x) = 0$.

Définition 10 Soit E un sous-ensemble de $\mathbf{R}$ et F un sous-ensemble de E : $F \subset E \subset \mathbf{R}$. On dit que F est un sous-ensemble dense de E si pour tout x dans E il existe arbitrairement proches de x des points de F :

$$\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists y \in F \cap]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$

Exemple 10 L'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est un sous-ensemble dense de $\mathbf{R}$.

Théorème 6 Soit $E \subset \mathbf{R}$ un intervalle, soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur E. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to \mathbf{R}$. Alors le sous-ensemble des points de E où f est continue est un sous-ensemble dense de E.

Exercice 4 Il n'existe pas de suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues définies sur $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice de $\mathbf{Q}$, c'est à dire vers la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui vaut 1 en tout rationnel et 0 en tout irrationnel.

Exercice 5 1/ Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction de $(-\infty, 0]$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \exp(x-n)$. Convergence simple, convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

2/ Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \exp(x-n)$. Convergence simple, convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

Exercice 6 1/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)dt.$$

2/ Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge vers $\exp(x)$.

3/ Montrer que si $K > 0$ la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $[-K, K]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge uniformément vers la restriction de exp à $[-K, K]$

4/ Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $\mathbf{R}$ par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ne converge pas uniformément vers l'exponentielle.

Théorème 7 (Stone-Weierstrass) Si $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction continue définie sur $[0,1]$ il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales définies sur $[0,1]$ qui converge uniformément vers f.

Exercice 7 (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

Convergence simple, convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie de la façon suivante.

Cas 1. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(t) = \dfrac{nt^2}{1+nt}$ si $t \geq 0$ et $f_n(t) = \dfrac{nt^3}{1+nt^2}$ si $t < 0$.

Cas 2. Si $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $f_n(t) = n \cos^n(t) \sin(t)$.

Cas 3. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(0) = 0$ et $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n\sqrt{t}}$ lorsque $t \in \mathbf{R}^*$.

Cas 4. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(t) = \dfrac{\sin^2(n\pi t)}{n \sin(\pi t)}$ si $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et $f_n(k) = 0$ si $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 8 (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

1) Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n} = \exp(t).$$

2) Soit, si $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{array}{l} f_n(t) = \exp(t) - \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n \text{ si } t > -n \\ f_n(t) = \exp(t) \text{ si } t \leq -n. \end{array}$$

a) Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction de f_n à $[0, +\infty)$ est croissante et en déduire que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0, a]$ avec $a \in [0, +\infty)$.

b) Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction de f_n à $(-\infty, 0]$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite de points $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet -2 pour limite.

c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $(-\infty, 0]$.

Exercice 9 (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

1) Convergence simple, convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(t) = nt(1-t)^n.$$

2) Si $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,1]$ on pose $g_n(t) = nf_n(t)$. Si $t \in ^{[} 0,1]$ on note $g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g_n(t)$.

Comparer

$$\int_0^1 g(t)dt \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(t)dt.$$

3 Régularité

Théorème 8 (Régularité) (d'après Combes) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions dérivables définies sur un intervalle E et soit $a \in E$ fixé. Si la suite des fonctions dérivées $(f_n')_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction g et si la suite numérique $(f_n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ converge alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction dérivable f qui vérifie $f' = g$.

Corollaire 1 (d'après Combes) Si g est une fonction continue définie sur un intervalle E il existe une fonction dérivable f définie sur cet intervalle telle que $f' = g$. En d'autres termes toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive, c'est à dire est la dérivée d'une fonction.

Exercice 10 Soit $K > 0$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction définie sur $]-K, K[$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1/ Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

2/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ la dérivée ${f_{n+1}}'$ de la fonction f_{n+1} vaut f_n : ${f_{n+1}}' = f_n$.

3/ Montrer que f est dérivable et vérifie $f' = f$.

Théorème 9 Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues définies sur un intervalle E et soit $a \in \overline{E}$ fixé. Soit $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Soit $a \in \overline{E}$ (a vaut éventuellement $-\infty$ ou $+\infty$). On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $\lim\limits_{x\to a} f_n(x) = l_n$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite l éventuellement infinie et cette limite l est la limite de la fonction f en a.

4 Séries numériques

Définition 11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite numérique. On appelle série associée à $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou série numérique de terme général u_n et on note parfois $\sum u_n$ la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ si } n \in \mathbf{N}$$

et appelée suite des sommes partielles.

Définition 12 On dit que la série numérique $\sum u_n$ est convergente si la suite $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. Si $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ a une limite finie ou infinie on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite et on l'appelle somme de la série.

Remarque 2 Si la série numérique $\sum u_n$ est convergente alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Exemple 11 Soit $r \in \mathbf{R}$. La série $\sum r^n$ est convergente si et seulement si $r \in]-1,1[$. Sa somme vaut alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Définition 13 On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ de terme général $|u_n|$ est convergente.

Exemple 12 Soit $r \in \mathbf{R}$. La série $\sum r^n$ est absolument convergente si et seulement si $r \in]-1,1[$.

Exemple 13 La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Remarque 3 Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est de Cauchy donc convergente.

Proposition 2 (Critères de convergence) (d'après Wikipedia) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques de terme général respectivement u_n et v_n.

1) (Comparaison) Si $\sum v_n$ est absolument convergente et si $|u_n| \leq |v_n|$ à partir d'un certain rang alors $\sum u_n$ est convergente.

2) (Règle de D'Alembert) On suppose qu'il existe r tel que $\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = r$. Si $r < 1$ alors $\sum u_n$ converge. Si $r > 1$ alors $\sum u_n$ ne converge pas (diverge).

3) (Règle de Cauchy) Soit $r = \limsup \sqrt[n]{|u_n|}$. Si $r < 1$, alors $\sum u_n$ converge. Si $r > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

4) (Comparaison série-intégrale) On suppose qu'il existe une fonction monotone $f : [0,+\infty) \to \mathbf{R}$ telle que si $n \in \mathbf{N}$ $u_n = f(n)$. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^\infty f(x)dx$ converge.

5) (Règle de Dirichlet) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers 0 et que les sommes $\sum_{k=0}^{n} v_k$ sont bornées. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

5 bis) (Séries alternées) On suppose que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers 0 et que les termes $(-1)^n u_n$ sont tous positifs. Alors $\sum u_n$ converge.

5 ter) (Règle d'Abel) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers 0 et que la série $\sum v_n$ converge. Alors la série $\sum u_n v_n$ converge.

Exercice 11 Convergence ou divergence des séries suivantes :

1) $\sum \frac{1}{n}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$,

2) $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Proposition 3 (Encore des critères de convergence) (d'après Wikipedia) Soit $\sum u_n$ une série numérique de terme général u_n.

1) (Règle de Raabe-Duhamel) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive. S'il existe $b>1$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq 1-\dfrac{b}{n}$ alors $\sum u_n$ converge. En revanche si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1-\dfrac{1}{n}$ alors $\sum u_n$ diverge.

2) (Règle de Bertrand) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement positive. S'il existe $b>1$ tel que $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\geq 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{b}{n\ln(n)}$ alors $\sum u_n$ converge. En revanche si $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\leq 1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n\ln(n)}$ alors $\sum u_n$ diverge.

3) (Règle de condensation de Cauchy) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ décroît vers 0. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum 2^n u_{2^n}$ converge et les inégalités

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n u_{2^n} \leq 2\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

sont toujours vérifiées, qu'il y ait convergence ou divergence.

5 Séries de fonctions. Convergences simple, absolue, uniforme, normale

Définition 14 Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions numériques définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On appelle série de fonctions associée à $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ou série de fonctions de terme général f_n et on note parfois $\sum f_n$ la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} f_k \text{ si } n\in\mathbf{N}$$

et appelée suit des sommes partielles.

Exemple 14 Si $K\in\mathbf{R}$ et si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite de fonctions définies sur $]-K,K[$ par $f_n(x)=x^n$ alors la série $\sum f_n$ de terme général f_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions définies sur $]-K,K[$ par

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x\in]-K,K[.$$

Définition 15 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On dit que $\sum f_n$ converge simplement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement. On note alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ la limite.

Définition 16 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On dit que $\sum f_n$ converge absolument si la série $\sum |f_n|$ converge simplement.

Définition 17 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On dit que $\sum f_n$ converge uniformément si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément.

Remarque 4 Si la série de fonctions $\sum f_n$ définies sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ converge uniformément alors les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang et de plus $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in E}|f_n(x)|=0$.

Définition 18 Soit f une fonction numérique définie sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. Si f est bornée on pose

$$||f||_\infty = \sup_{x\in E} |f(x)|$$

et on appelle norme infinie de f ce nombre.

Proposition 4 Si f et g sont deux fonctions numériques bornées définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$ alors on a

$$\begin{array}{lcl} ||f+g||_\infty & \leq & ||f||_\infty + ||g||_\infty, \\ ||\lambda f||_\infty & = & |\lambda| \cdot ||f||_\infty, \\ ||f||_\infty = 0 & \Longleftrightarrow & f = 0_E. \end{array}$$

Définition 19 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On dit que $\sum f_n$ converge normalement si les fonctions f_n sont bornées et si la série $\sum ||f_n||_\infty$ converge.

Proposition 5 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques et continues définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément ou normalement alors sa limite est une fonction continue.

Proposition 6 Soit $\sum f_n$ une série de fonctions numériques et continues définies sur un même sous-ensemble E de $\mathbf{R}$. On a les implications suivantes :

- Si $\sum f_n$ converge normalement alors $\sum f_n$ converge uniformément et absolument.

- Si $\sum f_n$ converge uniformément ou absolument alors $\sum f_n$ converge simplement.

Exercice 12 1) Trouver $\sum f_n$ qui converge simplement mais ni absolument, ni uniformément.

2) Trouver $\sum f_n$ qui converge uniformément mais pas normalement.

3) Trouver $\sum f_n$ qui converge absolument mais pas normalement.

6 Séries entières

Définition 20 On appelle série entière une série de fonctions numériques de la forme $\sum a_n x^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite numérique.

Définition 21 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On définit le rayon de convergence de cette série comme étant l'inverse de $\lim\sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$ lorsque cette limite supérieure est finie non nulle, 0 si elle est infinie et $+\infty$ si elle est nulle.

Exercice 13 1) Le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1.

2) Le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n} x^n$ est 1.

3) Le rayon de convergence de $\sum n! x^n$ est 0.

Proposition 7 Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières et soit $\lambda \neq 0$. Alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum \lambda a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence et la série entière $\sum (a_n + b_b) x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à ceux des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

Proposition 8 Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières. Alors la série entière $\sum(\sum_{k+l=n} a_k b_l) x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à ceux des séries $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

Proposition 9 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Proposition 10 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Si son rayon de convergence est 0 alors la série $\sum a_n x^n$ ne converge que pour $x = 0$.

Proposition 11 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment $[-K, K]$ avec $K \in [0, R[$ et si $x \in \mathbf{R}$ vérifie $|x| > R$ alors la suite $(|a_n x^n|)_{n \in \mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Proposition 12 Soit $R > 0$ et soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entières de rayons supérieurs ou égaux à $R >$. Alors si $x \in]-R, R[$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k+l=n} a_k b_l \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right).$$

Proposition 13 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Alors il existe une fonction f appelée somme de la série entière $\sum a_n x^n$ et qui vérifie les propriétés suivantes. La fonction f est définie sur $]-R, R[$. Elle est de classe C^∞. La série $\sum a_n x^n$ converge normalement vers f sur tout segment $[-K, K]$ inclus dans $]-R, R[$. En particulier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ si } |x| < R.$$

De plus, si $k \in \mathbf{N}$ alors $\sum \left(\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \right) a_n x^{n-k}$ converge normalement vers $f^{(k)}$ sur tout segment $[-K, K]$ inclus dans $]-R, R[$. En particulier

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \right) a_n x^{n-k} \text{ si } |x| < R \text{ et } k \in \mathbf{N}.$$

Proposition 14 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et soit $x_0 \in]-R, R[$ alors il existe une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence S au moins égal à $|R| - |x_0|$ et de somme g telle que si $x \in]-R, R[\cap]x_0 - S, x_0 + S[$ alors $f(x) = g(x - x_0)$. De plus si $n \in \mathbf{N}$ on a $b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$. Ainsi, si $x, x_0 \in]-R, R[$ et $|x - x_0| < |R| - |x_0|$, alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f(n)(x_0)(x - x_0)^n.$$

Proposition 15 Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul. Soit f la somme de cette série entière. On suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ compte une infinité de termes non nuls. Alors si $x \in]-R, R[$, la suite $(f^{(n)}(x))_{n \in \mathbf{N}}$ des dérivées successives de f en x compte une infinité de termes non nuls.

Exemple 15 Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$. Alors la fonction f est une fonction C^∞ mais il n'existe série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul dont la somme coïncide avec f sur un intervalle ouvert qui contient l'origine.

Définition 22 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$. On dit que f est développable en séries entières si pour tout $x_0 \in I$ il existe $\varepsilon > 0$ et une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon au moins égal à ε et dont la somme g vérifie $f(x) = g(x - x_0)$ pour tout $x \in I$ tel $|x - x_0| < \varepsilon$.

Proposition 16 Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction développable en séries entières alors f est de classe C^∞ et ses dérivées successives sont aussi développables en séries entières.

Proposition 17 Soit I et J deux intervalles ouverts non vides de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbf{R}$ deux fonctions développables en séries entières. Alors la composée $g \circ f$ l'est également.

Proposition 18 (Inversion locale et série entière) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence non nul et soit f sa somme. On suppose $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon strictement positif et dont la somme g vérifie $g(f(x) = f(g(x) = x$ pour tout $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$.

Exemples 16 1) Si $x \in]-1, 1[$ alors

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

2) Si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ et et $x \in]-1, 1[$ alors

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \times \cdots \times (\alpha - n + 1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^n.$$

3) Si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

4) Si $x \in]-1, 1[$ alors

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

5) Si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$