Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

MEEF PLC Maths
2023-2024

Suites et séries de fonctions
Exercices

version provisoire de 7 septembre 2023

```
Cette liste d'exercices est composée des exemples et des exercices
du polycopié et de quelques énoncés en lien avec ce dernier.
```

Exercice 1 Comparer brièvement $(\mathbf{N},+,\times)$, $(\mathbf{Z},+,\times)$, $(\mathbf{Q},+,\times)$, $(\mathbf{R},+,\times)$, $(\mathbf{C},+,\times)$ et $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z},+,\times)$.

Exercice 2 Soit $(E,\leq_E)$ et $(F,\leq_F)$ deux ensembles finis, de même cardinal et totalement ordonnés. Montrer qu'il existe une bijection strictement croissante de E dans F.

Exercice 3 Montrer qu'il n'existe pas de bijection strictement croissante de $\mathbf{N}$ muni de son ordre usuel dans $\mathbf{Z}$ muni également de son ordre usuel.

1 Suites numériques

Exercice 4 *(Exemple 1 du poly)* Soit $r \in [0,1]$. On considère la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = r^n$, c'est à dire définie par récurrence par $u_0 = 1$ et si $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = r \times u_n$. Montrer que si $r \in [0,1[$ la suite u est convergente de limite 0 et si $r = 1$ la suite u est convergente de limite 1.

Exercice 5 *(Exemple 2 du poly)* Montrer que si $r \in [0,1[$ la suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

vérifie pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$u_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

et elle est convergente de limite

$$l = \frac{1}{1-r}.$$

Exercice 6 *(Propriété 4 du poly)* Montrer que si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente il existe un unique réel l tel que $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente de limite l.

Exercice 7 *(Propriété 5 du poly)* Montrer que si une suite numérique $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente alors elle est bornée.

Exercice 8 *(Exemple 3 du poly)* Montrer que si $r \in \mathbf{R}$ vérifie $|r| > 1$ alors la suite $(r^n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 9 *(Exemple 4 du poly)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n \times (1 + \frac{1}{n+1}.)$ Montrer qu'alors

$$\liminf(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = -1, \ \limsup(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = 1$$

et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ n'a pas de limite.

2 Suites de fonctions numériques. Convergences simple et uniforme

Exercice 10 *(Exemple 5 du poly)* Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. Vérifier que la famille $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions numériques.

Exercice 11 *(Exemple 6 du poly)* Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. On note aussi $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers la fonction f.

Exercice 12 *(Exemple 7 du poly)* Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par $f_n(x) = x^n$. On note aussi $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction f.

Exercice 13 *(Exemples 8 du poly)* Montrer que les fonctions rationnelles, les fonctions trigonométriques, l'exponentielle, le logarithme, les sommes, produits et composées de fonctions continues ainsi que les réciproques de fonctions continues injectives sont continues.

Exercice 14 *(Exemple 9 du poly)* Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels bornée (il existe $K > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ $|a_n| \leq K$). Montrer qu'alors pour tout $x \in]-1,1[$ il existe un réel $f(x)$ tel que la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$$

est une suite convergente de limite $f(x)$ et la fonction f ainsi définie sur $]-1,1[$ est une fonction continue.

Exercice 15 *(Exercice 1 du poly)* (d'après Quercia) Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n$.

Exercice 16 *(Exercice 2 du poly)* (d'après Quercia) On pose $f_n(x) = x^n(1-x)$ et $g_n(x) = x^n \sin(\pi x)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1]$.

1) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,1]$.

2) En déduire qu'il en est de même pour la suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (on peut utiliser la concavité de sin sur $[0,\pi]$).

Exercice 17 *(Exercice 3 du poly)* Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction affine par morceaux définie sur $[0,1]$ de la façon suivante. Si $k \in \mathbf{N}$ et $k < 2^n$ alors la restriction de f à $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}]$ est affine. Si $x \in [0,1]$ est de la forme $x = \frac{2m+1}{2^q}$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ et inférieur ou égal à n alors $f_n(x) = \frac{1}{2^q}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et converge simplement mais pas uniformément vers la fonction f définie de la façon suivante. Si $x \in [0,1]$ est de la forme $x = \frac{2m+1}{2^q}$ avec $m \in \mathbf{N}$ et $q \in \mathbf{N}$ alors $f(x) = \frac{1}{2^q}$ et si x n'est pas de cette forme $f(x) = 0$.

Exercice 18 *(Exemple 10 du poly)* Montrer que l'ensemble $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels est un sous-ensemble dense de $\mathbf{R}$.

Exercice 19 *(Exercice 4 du poly)* Montrer qu'il n'existe pas de suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions continues définies sur $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers la fonction indicatrice de $\mathbf{Q}$, c'est à dire vers la fonction définie sur $\mathbf{R}$ qui vaut 1 en tout rationnel et 0 en tout irrationnel.

Exercice 20 *(Exercice 5 du poly)* 1/ Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction de $(-\infty, 0]$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \exp(x-n)$. Convergence simple, convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

2/ Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f_n(x) = \exp(x-n)$. Convergence simple, convergence uniforme de le suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$?

Exercice 21 *(Exercice 6 du poly)* 1/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on a

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)dt.$$

2/ Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge vers $\exp(x)$.

3/ Montrer que si $K > 0$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $[-K, K]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

converge uniformément vers la restriction de exp à $[-K, K]$

4/ Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies sur $\mathbf{R}$ par

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

ne converge pas uniformément vers l'exponentielle.

Exercice 22 *(Exercice 7 du poly)* (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

Convergence simple, convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie de la façon suivante.

Cas 1. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(t) = \dfrac{nt^2}{1+nt}$ si $t \geq 0$ et $f_n(t) = \dfrac{nt^3}{1+nt^2}$ si $t < 0$.

Exercice 23 *(Exercice 7 du poly, suite)* Cas 2. Si $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ alors $f_n(t) = n\cos^n(t)\sin(t)$.

Exercice 24 *(Exercice 7 du poly, suite)* Cas 3. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(0) = 0$ et $f_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n\sqrt{t}}$ lorsque $t \in \mathbf{R}^*$.

Exercice 25 *(Exercice 7 du poly, fin)* Cas 4. Si $n \in \mathbf{N}$ alors $f_n(t) = \dfrac{\sin^2(n\pi t)}{n\sin(\pi t)}$ si $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ et $f_n(k) = 0$ si $k \in \mathbf{Z}$.

Exercice 26 *(Exercice 8 du poly)* (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

1) Montrer que si $t \in \mathbf{R}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n} = \exp(t).$$

2) Soit, si $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\begin{array}{l} f_n(t) = \exp(t) - \left(1+\dfrac{t}{n}\right)^n \text{ si } t > -n \\ f_n(t) = \exp(t) \text{ si } t \leq -n. \end{array}$$

a) Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction de f_n à $[0,+\infty)$ est croissante et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a \in [0,+\infty)$.

b) Montrer que si $n \in \mathbf{N}^*$ la restriction de f_n à $(-\infty,0]$ est positive, atteint son maximum en un point x_n et que la suite de points $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ admet -2 pour limite.

c) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge uniformément sur $(-\infty,0]$.

Exercice 27 *(Exercice 9 du poly)* (d'après Ramis, Deschamps, Odoux)

1) Convergence simple, convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(t) = nt(1-t)^n.$$

2) Si $n \in \mathbf{N}$ et $t \in [0,1]$ on pose $g_n(t) = nf_n(t)$. Si $t \in [0,1]$ on note $g(t) = \lim_{n\to+\infty} g_n(t)$.

Comparer

$$\int_0^1 g(t)dt \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 g_n(t)dt.$$

3 Régularité

Exercice 28 *(Exercice 10 du poly)* Soit $K > 0$. Si $n \in \mathbf{N}$ on note f_n la fonction définie sur $]-K,K[$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1/ Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

2/ Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ la dérivée ${f_{n+1}}'$ de la fonction f_{n+1} vaut f_n : ${f_{n+1}}' = f_n$.

3/ Montrer que f est dérivable et vérifie $f' = f$. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f alors la suite $(l_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une limite l éventuellement infinie et cette limite l est la limite de la fonction f en a.

4 Séries numériques

Exercice 29 *(Remarque 2 du poly)* Montrer que si la série numérique $\sum u_n$ est convergente alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers 0.

Exercice 30 *(Exemple 11 du poly)* Soit $r \in \mathbf{R}$. Montrer que la série $\sum r^n$ est convergente si et seulement si $r \in]-1,1[$. Montrer que sa somme vaut alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Exercice 31 *(Exemple 12 du poly)* Soit $r \in \mathbf{R}$. Montrer que la série $\sum r^n$ est absolument convergente si et seulement si $r \in]-1,1[$.

Exercice 32 *(Exemple 13 du poly)* Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente mais pas absolument convergente.

Exercice 33 *(Remarque 3 du poly)* Soit $\sum u_n$ une série numérique. Montrer que si $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est de Cauchy donc convergente.

Exercice 34 *(Exercice 11 du poly)* Convergence ou divergence des séries suivantes :

1) $\sum \frac{1}{n}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$,

2) $\sum \frac{1}{n^{\alpha} \ln(n)^{\beta}}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5 Séries de fonctions. Convergences simple, absolue, uniforme, normale

Exercice 35 *(Exemple 14 du poly)* Montrer que si $K \in \mathbf{R}$ et si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite de fonctions définies sur $]-K,K[$ par $f_n(x) = x^n$ alors la série $\sum f_n$ de terme général f_n est la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions définies sur $]-K,K[$ par

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \text{ si } x \in]-K,K[.$$

Exercice 36 *(Remarque 4 du poly)* Montrer que si la série de fonctions $\sum f_n$ définies sur un sous-ensemble E de $\mathbf{R}$ converge uniformément alors les fonctions f_n sont bornées à partir d'un certain rang et de plus $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in E} |f_n(x)| = 0$.

Exercice 37 *(Exercice 12 du poly)* 1) Trouver $\sum f_n$ qui converge simplement mais ni absolument, ni uniformément.

2) Trouver $\sum f_n$ qui converge uniformément mais pas normalement.

3) Trouver $\sum f_n$ qui converge absolument mais pas normalement.

6 Séries entières

Exercice 38 *(Exercice 13 du poly)* 1) Montrer que le rayon de convergence de $\sum x^n$ est 1.

2) Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{n} x^n$ est 1.

3) Montrer que le rayon de convergence de $\sum n! x^n$ est 0.

Exercice 39 *(Exemple 15 du poly)* Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$. Montrer qu'alors la fonction f est une fonction C^∞ mais qu'il n'existe pas de série entière $\sum a_n x^n$ de rayon non nul dont la somme coïncide avec f sur un intervalle ouvert qui contient l'origine.

Exercice 40 *(Exemples 16 du poly)* 1) Montrer que si $x \in]-1,1[$ alors

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

2) Montrer que si $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ et et $x \in]-1,1[$ alors

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha \times \cdots \times (\alpha - n + 1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\alpha - k) \right) x^n.$$

Exercice 41 *(Exemples 16 du poly, suite)* 3) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

4) Montrer que si $x \in]-1,1[$ alors

$$\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Exercice 42 *(Exemples 16 du poly, fin)* 5) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \text{ et } \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$