Université de Rennes 1
UFR Mathématiques

MEEF PLC Maths
2023-2024

Équations différentielles
Exercices

version provisoire de 6 septembre 2023

Cette liste d'exercices reprend celle donnée en deuxième année de licence MIASHS des universités rennaises de 2017 à 2022.

Exercice 1. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y' = x^2 - 1$, $y' = x^3 - x + 1$
2. $y' = \cos x$, $y' = \cos(2x)$
3. $y'' = x - 1$, $y'' = \sin x$
4. $y'' = \exp(x)$, $y'' = \tan^2 x$

Exercice 2.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :
$y' = \tan(x)$,
$y' = \ln(5x)$,
$y' = \tan(3x+7)$,
$y' = \ln(7x+3)$,
$y' = \cos(x)\tan(\sin(x))$,
$y' = \dfrac{1}{x}\ln(\ln(x))$.

Exercice 3. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes qui prennent la valeur 0 en 2.
1. $y' = 2x - 3$, $y' = x^2 - 2x + 1$
2. $y' = \exp(x)$, $xy' = 2$

Exercice 4. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes qui prennent la valeur 1 en 1 et dont la dérivée en 1 vaut 2.
1. $y'' = x^2 - 1$, $y'' = x^4$
2. $y'' = \exp(2x)$, $xy'' = 1$

Exercice 5.
Trouver les solutions des équations différentielles avec les conditions données :
$y' = \exp(2x)$ et $y(5) = 3$,
$xy' = 7$ et $y(5) = 3$,
$y' = x\exp(x^2)$ et $y(9) = 2$,
$y' = \exp(3x)$ et $(1) = 1$,
$x^2y' = 2$ et $(1) = 1$,
$x^3y' = 7$ et $y(9) = 2$,
$y'' = x^3 - 1$, $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$,
$y'' = \exp(7x)$, $y(1) = 1$ et $y'(1) = 2$,
$y'' = x^4 - \cos(x)$, $y(3) = 2$ et $y'(2) = 3$,
$y'' = \ln(x)$, $y(3) = 2$ et $y'(2) = 3$,
$y'' = x^\lambda$, $y(1) = 1$ et $y'(1) = 1$ avec $\lambda \in \mathbf{R}$.

Exercice 6. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y' = 2y$, $y' = -\frac{y}{2}$
2. $y' + \frac{3}{2}y = 0$, $2y' = 5y$

Exercice 7. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes qui prennent la valeur 1 en 1.
1. $y' + 5y = 0$, $8y' = y$
2. $7y' + y = 0$, $3y' + 5y = 0$

Exercice 8.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :
$y' = \cos(x) - 8y$,
$2y' + \frac{3}{5}y = \frac{22}{7}$,
$y' = \sin(x) - 4y$,
$7y + \frac{3}{5}y' = \frac{22}{7}$.

Exercice 9.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions données :
$7y' + 2y = 0$ et $y(2) = 3$,
$3y' + 5y = 2$ et $y(2) = 3$,
$5y' + 3y = 0$ et $y(3) = 5$,
$3y' + 5y = 1$ et $y(3) = 5$,
$5y' + 2y = 0$ et $y(3) = 1$,
$3y' + 4y = 2$ et $y(3) = 1$.

Exercice 10. *(T CDE, nouvelle collection Durande, 1979)*
(équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y'' + 16y = 0$, $4y'' + 25y = 0$
2. $y'' + 2y = 0$, $9y'' + 64y = 0$

Exercice 11. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes qui prennent la valeur 1 en 0 et dont la dérivée en 0 vaut 2.
1. $y'' + 9y = 0$, $4y'' + 49y = 0$
2. $2y'' + y = 0$, $4y'' + 121y = 0$

Exercice 12.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
$y'' + 25y = 0$,
$4y'' - 9y = 3$,
$y'' + 16y = 0$,
$25y'' - 4y = 3$,
$y'' + 16y = 0$,
$4y'' - 9y = 1$.

Exercice 13. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre sans second membre) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.
1. $y'' - 5y' + 6y = 0$; $y(0) = 1, y'(0) = 4$
2. $y'' - 8y' + 12y = 0$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 2, y'(0) = 4$
4. $y'' + 2y' + y = 0$; $y(0) = 1, y'(0) = 0$

5. $y'' - 9y' = 0\,;\, y(0) = 6, y'(0) = 4$
6. $y'' + 9y = 0\,;\, y(0) = y_0, y'(0) = k$
7. $y'' + 4y = 0\,;\, y(0) = 1, y'(0) = 0$
8. $y'' = y\,;\, y(0) = 0, y(1) = 0$
9. $y'' = -y\,;\, y(0) = 0, y(0) = 0$

Exercice 14.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions données :
$y'' + 2y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(1) = 0$,
$4y'' - 49y = 1$ avec $y(0) = 2$ et $y'(1) = 0$,
$y'' + 3y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 4$,
$y'' + 3y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$,
$y'' + 6y' + 9y = 0$ avec $y(0) = 5$ et $y'(0) = 7$,
$y'' + 5y' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$,
$y'' + 6y' + 9y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 0$,
$y'' + 2y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y(1) = 1$,
$y'' + y = 1$ avec $y(1) = 1$ et $y'(1) = 1$,
$y'' - y = x^2 + x + 1$ avec $y(1) = 1$ et $y'(1) = 1$.

Exercice 15. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre polynomial) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions initiales données.
1. $y'' - 5y' + 6y = 3\,;\, y(0) = 1, y'(0) = 4$
2. $y''(x) - 8y'(x) + 12y(x) = 2x\,;\, y(0) = 0, y'(0) = 1$
3. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 1\,;\, y(0) = 2, y'(0) = 4$
4. $y'' + 2y' + y = x^2 - x\,;\, y(0) = 1, y'(0) = 0$
5. $y'' - 9y' = -x\,;\, y(0) = 6, y'(0) = 4$

Exercice 16. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre exponentiel) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y'' + y = e^{2x}$
2. $y'' + y' + y = e^{3x}$
3. $y'' + 5y' = e^{-5x}$
4. $y'' - 4y = e^{\alpha x}$, avec $\alpha \in \mathbf{R}$

Exercice 17. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre en cos ou sin) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y'' + y = \cos(2x)$
2. $y'' + 3y' + y = \sin x$

Exercice 18. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$
2. $y'' - 4y' + 3y = x^2e^{-x}$
3. $y'' - 2y' + y = xe^{x}$

Exercice 19. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre du type $e^{\alpha x}\cos x P(x)$ ou $e^{\alpha x}\sin x P(x)$) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y'' - 2y' + y = x\cos x$
2. $y'' + y = x\sin x$

3. $y'' - 2y = xe^{2x}\sin x$

Exercice 20. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
(superposition des solutions) Trouver les solutions des équations différentielles suivantes.
1. $y'' - 4y' + y = x + e^{2x}$
2. $y'' - 2y' + 10y = \sin(3x) + e^x$
3. $y'' - 10y' + 25y = \cosh(5x)$
4. $y'' + y = 2x\cos(x)\cos(2x)$

Exercice 21. *(A01 et AN1, Université de Rennes 1, 2006 à 2008)*
Résoudre, sur $\mathbf{R}$, l'équation différentielle $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$. On pourra poser $z(u) = y(x)$, avec $x = \ln u$.

Exercice 22.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes :
$y'' + 2y = e^{3x}$,
$y'' - y' + y = e^{7x} + 3$,
$y'' + 2y = e^{5x}$,
$y'' + y' - 6y = e^{2x} + 1$,
$y'' + 2y = \cos(x)e^x$,
$y'' + y = e^x + 1$.

Exercice 23.
Trouver les solutions des équations différentielles suivantes avec les conditions données :
$y'' + 6y' - 9y = x^2 + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$,
$y'' + 9y' = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$,
$y'' + 2y' + y = x^2 + 1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$,
$y'' + y' = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$ et $y(0) = 1$,
$y'' + 6y' - 9y = x^2 + 1$ avec $y(1) = 3$ et $y(2) = 5$,
$y'' + 9y' = \cos(x)$ avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 2$.

Exercice 24.
Résoudre $Y' = AY + B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 25.
On considère

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1/ Montrer que P^{-1} existe et calculer cette matrice.
2/ Calculer PAP^{-1}.
3/ Résoudre $Z' = BZ$.
4/ Résoudre $Y' = AY$.

Exercice 26.
On considère

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -16 & -27 \\ 10 & 17 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dire des équations différentielles $Y' = AY$, $Y' = BY$, $Y' = CY$ et $Y' = DY$ lesquelles correspondent à un col, un noeud, un centre ou un foyer.