Analyse 1
M1 MEEF PLC MATHS
UNIV RENNES 1 et INSPE BRETAGNE
04/01/2021

Correction du contrôle continu de décembre

- Les copies sont disponibles au bureau 035 RDC bât 23.
- Exercice 1

1) Formule de Taylor.
- Faire attention hypo de TY sont plus faibles que celle de TL qui sont plus faibles que celles de T avec RI.

2) ⚠ La formule à prouver

$$(*) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + \dots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$ est une formule algébrique exacte qui ne se prouve avec une formule de Taylor.

(*) se prouve par récurrence sur n ou alors on peut se souvenir de

$$x^{n+1} - 1 = (x-1)(1 + x + \dots + x^n)$$

3) - On peut calculer le DL à l'ordre 6 de tan en 0 avec TY mais c'est difficile car il est difficile de dériver 5 fois tan (5 fois suffit car tan est un paire)
- On peut calculer le DL de $\frac{1}{\cos x}$ en utilisant le fait que $$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_1(x)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2}\left(1 + \frac{x^2}{12} + x^3 \varepsilon_2(x)\right)}$$

et le fait que $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^n + t^n \varepsilon_3(t)$

Et on utilise $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6 \varepsilon_4(x)$.

Autre méthode par division suivant les puissances croissantes :

Soit P, Q deux polynômes avec $Q(0) \neq 0$

Alors $P(X) = A(X)\,Q(X) + X^{n+1}B(X)$ où A est un polynôme de $d^\circ \leq n$ et B est un polynôme. À $n \in \mathbb{N}$ fixé, (A, B) est unique

En pratique avec sin et cos

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6 \varepsilon_1(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5 \varepsilon_2(x)$$

Soit $P = X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120}$

$Q = 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24}$

$$\begin{array}{l|l}
X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} & 1 - \frac{X^2}{2} + \frac{X^4}{24} \\
\hline
X - \frac{X^3}{2} + \frac{X^5}{24} & \underbrace{X + \frac{X^3}{3} + \frac{2}{15}X^5} \\
\hline
0 + \frac{X^3}{3} - \frac{1}{30}X^5 & \\
\frac{X^3}{3} - \frac{1}{6}X^5 + \dots & \\
\frac{2}{15}X^5 + \dots &
\end{array}$$

le polynôme de $d^\circ 5$ qui donne le DL à $d^\circ 6$ de $\tan x$!

Question sur parité

Soit f paire. $f(-x) = f(x)$.

$$\frac{f(y)-f(-x)}{y-(-x)} = \frac{f(-y)-f(x)}{y-(-x)}$$

$$= -\frac{f(-y)-f(x)}{(-y)-x}$$

$y \to -x$; $(-y) \to x$

$$f'(-x) = -f'(x)$$

Si f paire f' impaire

De même si f impaire f' est paire

Si f est paire alors $f'(0) = 0$

Car $f'(-x) = -f'(x)$ donc $f'(0) = -f'(0)$

donc $f'(0) = 0$.

On montre ainsi que si

f paire $\Rightarrow f'(0) = f'''(0) = \dots = f^{(2n+1)}(0) = 0$

f impaire $\Rightarrow f''(0) = f^{(4)}(0) = \dots = f^{(2n)}(0) = 0$

Exercice 2 - Prouvons que si $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^{\times}$ alors

$x + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par l'absurde.

Si $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1} \in \mathbb{Q}$ il existe $\frac{P}{Q} = x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ $P, Q \in \mathbb{Z}$

donc $\frac{p}{q} + \frac{\sqrt{2}}{n+1} = \frac{P}{Q}$ donc $\sqrt{2} = (n+1)\left(\frac{Pq - pQ}{qQ}\right) \in \mathbb{Q}$

Donc $\sqrt{2}$ serait rationnel. Ceci n'est pas vrai donc $x+\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ n'est pas rationnel

3) La preuve qui est faite ici s'inspire de la preuve de l'irrationnalité de $e = \exp(1)$

Exercice C.

1) • La suite n'a pas de limite finie.

Sinon si $l \in \mathbb{R}$ est limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

- $l \in \mathbb{N}$ et il existe N tel que si $n \geq N$ $|u_n - l| < \frac{1}{2}$ donc $u_n = l$ (car $u_n \in \mathbb{N}$) donc la suite n'est pas injective
- $l \notin \mathbb{N}$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\cap \mathbb{N} = \emptyset.$$

Donc la suite ne peut converger vers l.

• La suite n'est pas nécessairement croissante par exemple u_n défini par

$u_{2n+1} = 2n$ et $u_{2n} = 2n+1$

• On peut prouver que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est injective et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $\lim u_n = +\infty$

Une preuve est dans le corrigé en ligne.

Voici une seconde preuve.

On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$. Il existe donc $A \in \mathbb{R}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ il existe $p_n > n$ tel que

$$u_{p_n} < A.$$

On pose $q_0 = p_0$ soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $q_0, \dots, q_n$ définis

$q_{n+1} = P_{q_n}$

Par construction $q_{n+1} > q_n$ et $u_{q_{n+1}} < A$.

On a donc une suite extraite

$(u_{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{q_n} < A \; \forall n \in \mathbb{N}$

Or $u_{q_n} \in \mathbb{N}$ il existe au plus $1+A$ entiers naturels entre 0 et A. Donc nécessairement il existe n_1 et n_2 différents $u_{q_{n_1}} = u_{q_{n_2}}$ donc u n'est pas injective.

2) Se traite de façon analogue à la question 1).

3) Donner $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ non bornée et non injective

$u_{2n+1} = n$ et $u_{2n} = 0$.

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$\infty \qquad\qquad 0$

Exercice D.

1) On peut résoudre cette question sans double récurrence mais par une récurrence simple.

2) $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = m\} \supset \{2^k + m,\ k \in \mathbb{N},\ 2^k > m\}$ (question 1)

$\underbrace{}_{\text{infini}}$ $\supset \{2^k + m,\ k \in \mathbb{N}\ \ k > \frac{\ln(m)}{\ln(2)}\}$

$\underbrace{}_{\text{infini}}$

3) Non injective d'après 2
Surjective d'après 1
Pas de limite car si $m \in \mathbb{N}$ alors la suite extraite $(u_{2^k+m})_{k\in\mathbb{N}}$ vaut m constamment donc tend vers m. Donc tout entier $m \in \mathbb{N}$ est limite d'une suite extraite bien choisie. Donc u n'a pas de limite.

EXERCICE E. $f = a_1 x^{n_1} + \dots + a_d x^{n_d}$ $a_1, \dots, a_d \neq 0$

$n_1 < \dots < n_d$

$$g = a_1 x^{n_1 - n_1} + \dots + a_d x^{n_d - n_1}$$

On a donc f, g polynômes somme de d monômes et $g(x) \times x^{n_1} = f(x)$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$
Si $f(x) = 0$ alors $g(x) x^{n_1} = f(x) = 0$ donc soit $x = 0$ soit $g(x) = 0$

Donc $f^{-1}(0) = \{x \mid f(x)\} \subset \{x \mid g(x) = 0\} \cup \{0\}$
$\subset g^{-1}(0) \cup \{0\}$

Donc $\mathrm{Card}\, f^{-1}(0) \leq \mathrm{Card}\, g^{-1}(0) + 1$

Soit $\{a_1, \dots, a_r\} = g^{-1}(0)$. D'après Rolle entre a_i et a_{i+1} g' s'annule, il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $g'(b_i) = 0$ si $i = 1, \dots, r-1$
donc on a $a_1 < b_1 < a_2 < \dots < b_{r-1} < a_r$
Ainsi si $\mathrm{Card}\, g^{-1}(0) = r$ $\mathrm{Card}(g')^{-1}(0) \geq r - 1$.

Donc $\quad \mathrm{Card}\, g^{-1}(0) \leq 1 + \mathrm{Card}(g')^{-1}(0)$

2) Prouve par récurrence que $\mathrm{Card}\, f^{-1}(0) \leq 2d-1$.

$\underline{d=1}$. Dans ce cas $\quad f(x) = a_1 x^{n_1}$

donc $\quad f^{-1}(0) \subset \{0\}$ donc $\qquad$ initialisation

$\mathrm{Card}\, f^{-1}(0) \leq 1 = 2\times 1 - 1 \qquad$ OK.

soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat est vrai au rang d

Soit $f = a_1 x^{n_1} + \dots + a_{d+1} x^{n_{d+1}}$

Soit $g = a_1 x^{n_1 - n_1} + \dots + a_{d+1} x^{n_{d+1} - n_1}$

La fonction g' vaut $g' = a_2(n_2 - n_1) x^{n_2 - n_1 - 1} + \dots + a_{d+1}(n_{d+1} - n_1) x^{n_{d+1} - n_1 - 1}$

on applique la récurrence à g' qui est composée de d monômes

Donc $\quad \mathrm{Card}(g')^{-1}(0) \leq 2d - 1$

$\mathrm{Card}(g)^{-1}(0) \leq (2d-1) + 1 \quad$ (d'après 1)

$\leq 2d$

$\mathrm{Card}\, f^{-1}(0) \leq 2d + 1 \quad$ (d'après 1)

$\leq 2(d+1) - 1$

Hérédité OK

Initialisation + Hérédité $\longrightarrow$ CQFD

3) On considère $X + (X^2 - R_1^2) + \dots + (X^2 - R_{d-1})^2 = f(X)$

Il y a $2d-1$ zéros $0, R_1, -R_1, \dots, R_{d-1}, -R_{d-1}$.

Si on développe $f(X)$ on constate que f a autant de monômes que
$h(T) = (T - R_1^2) \cdots (T - R_{d-1}^2)$ qui est un polynôme de degré $d-1$ en T et qui est donc composé de d monômes au plus.

Puisque $f(X) = X\,h(X^2)$ f a au plus d monômes

Ceci achève la séance et l'UE d'Analyse 1.