Analyse 1
M1 MEEF PLC MATHS
UNIV RENNES 1 et INSPE BRETAGNE
07/12/2020

Suite des solutions des question-reponse.

Q4. ∘ Prendre $u_n = u_0 \times 2^n$ $n \in \mathbb{N}$.

Si $u_0 = 0$ $u_n = 0 \longrightarrow 0$

Si $u_0 = 1$ $u_n = 2^n \geq n \longrightarrow +\infty$.

Ces exemples sont donnés par la même relation de récurrence mais la notion de la limite dépend du premier terme.

∘ Autre point de vue. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge / diverge / diverge $\pm\infty$.

Si il existe N tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ on a $u_n = v_n$

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge / diverge / diverge en $\pm\infty$

Q27 Dérivabilité $\sqrt{|x|}$.

La preuve proposée n'établit la non dérivabilité de f en 0 mais elle montre que f n'est pas C^1.

Pour montrer que f n'est pas dérivable en 0 il suffit de s'intéresser à

$$\tau_0 f(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{si } x>0$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad \text{si } x<0$$

c'est à dire au taux d'accroissement de f entre 0 et x

On a $\lim_{0^+} \tau_0 f(x) = +\infty$ et $\lim_{0^-} \tau_0 f(x) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

Q38. $f(x) = \dfrac{x\sin(\pi x)}{E(x)}$ si $x \geq 1$

Continuité ?

Les difficultés se concentrent en $x \in \mathbb{N}^*$.

idée de preuve.

On prend $n \in \mathbb{N}^*$ on prend

$x \in]n-1, n+1[\cap [1, +\infty[$

alors $n-1 \leq E(x) \leq n+1$ discontinuité de la partie entière

et $1 \leq E(x)$

Donc $0 \leq \dfrac{1}{E(x)} \leq 1$ (1)

$$0 \leqslant x \leqslant n+1 \quad (2)$$

$$0 \leqslant |\sin(\pi x)| = |\sin(\pi(x-n))|$$

$$0 \leqslant |\sin(\pi(x))| \leqslant \pi |x-n| \quad (3)$$

Ainsi à partir de (1) de (2) et de (3) on obtient, si $x \geqslant 1$ et $x \in]n-1, n+1[$

$$0 \leqslant |f(x)| \leqslant (n+1)\, \pi\, |x-n|$$

On $\lim\limits_{x \to n} (n+1)\, \pi\, |x-n| = 0$

Donc d'après le théorème d'encadrement

$$\lim_{x \to n} f(x) = 0 = f(n)$$

Ainsi f est continue en $x = n \in \mathbb{N}^*$

Q3.1 Elle est équivalente si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et si $x \neq y$ $f'(y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$

Ce n'est ainsi que si f est affine.

En effet, si $f'(y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x-y}$ alors

$f(x) = f(y) + f'(y)(x-y)$. Si on pose $a = f'(y)$ et $b = f(y)$ on obtient si $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = b + a(x-y)$ c'est bien une fonction affine.

Réciproquement : Si f est affine alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \alpha x + \beta$

donc $f'(x) = \alpha$. Ainsi $y \in \mathbb{R}$ et

On a $f(x) - f(y) = (\alpha x + \beta) - (\alpha y + \beta)$

$= \alpha(x-y)$

$= f'(y)(x-y)$.

Q16. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés (définition/caractérisation)

Infos sur les compacts de $\mathbb{R}$.

Un ensemble K de $\mathbb{R}$ est compact si et seulement si il vérifie l'une des trois propriétés suivantes qui sont équivalentes

1) K est un fermé borné.

2) De toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K on peut extraire une suite convergente vers $l \in K$.

3) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles

ouvert. Si $K \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \bigcup_{n=0}^{N} I_n$.

Donnons maintenant un compact qui n'est pas un segment.

1/ $\{0,1\}$

2/ $[0,1] \cup [2,3]$

3/ $\{0\} \cup \{1/n \,;\, n \in \mathbb{N}^*\}$

4/ $\emptyset$ est compact.

5/ L'ensemble triadique de Cantor.

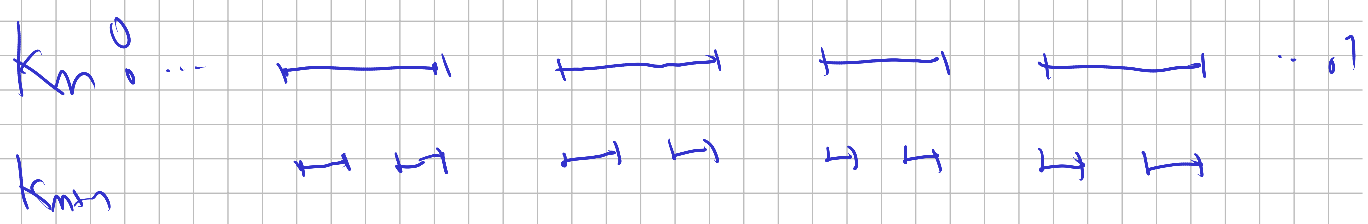
On pose $K_0 = [0,1]$

$K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$

$\vdots$

$K_n = I_1 \cup \dots \cup I_{2^{n-1}}$

$K_{n+1} = (I_{11} \cup I_{12}) \cup \dots \cup (I_{2^{n-1},1} \cup I_{2^{n-1},2})$

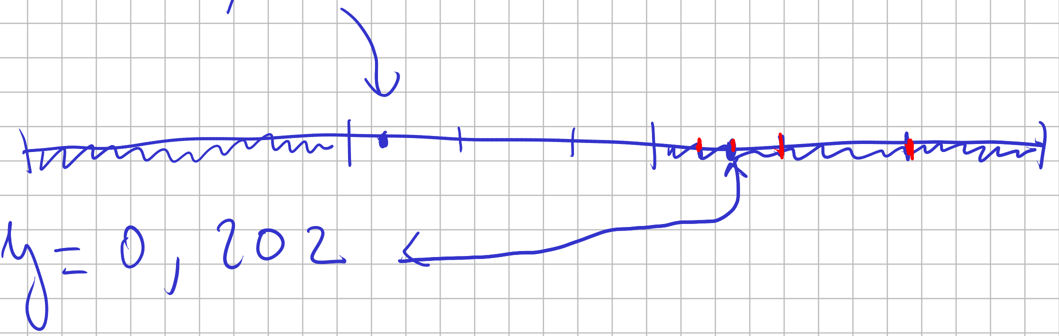


$K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \dots$

$K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ compact. Triadique de Cantor.

Autre point de vue sur le triadique de Cantor. C'est le sous-ensemble des nombres $x \in [0,1]$ qui s'écrivent sans 1 dans leur écriture en base 3.

ex $x = 0,101$ en base 3 $\in [0,1] \setminus K_1$



Exercice 12/51

Objectif : Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\sum\limits_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0$

1) On s'intéresse à la suite

$$\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}\right)_{n\geqslant p}$$

à p fixé $\in \mathbb{N}$.

Cette suite est indexée par $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p$

On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{p} = 0$$

C'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{n!}{p!(n-p)!} = 0$

Majorons $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{p!(n-p)!}$

∘ Par exemple $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \leqslant \frac{n!}{2^n}$

Mais $\frac{n!}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc cette majoration ne va pas permettre de conclure !

∘ Autre majoration $\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\cdots(n-p+1) \leqslant n^p$

Donc $\frac{1}{2^n} \frac{n!}{p!(n-p)!} \leqslant \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{p!} n^p$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^p}{2^n} = 0$ donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \times \frac{1}{p!} n^p = 0$

Finalement $0 \leqslant \frac{1}{2^n} \binom{n}{p} \leqslant \frac{1}{2^n} \frac{1}{p!} n^p \longrightarrow 0$

Donc par le th. d'encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \binom{n}{p} = 0$

2) On veut montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0 \quad \text{si} \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Traduisons $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Soit $\varepsilon > 0$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N$ on a

$|u_p| < \varepsilon$.

Soit $n \geq N$

$$\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = \overbrace{\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{N-1} \binom{n}{p} u_p}^{1} + \overbrace{\frac{1}{2^n} \sum_{p=N}^{n} \binom{n}{p} u_p}^{2}$$

Si $p = 0, \dots, N-1$ on a $\frac{1}{2^n}\binom{n}{p} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc il existe M_p tel que si $n \geq M_p$

$$\left| \frac{1}{2^n}\binom{n}{p} \right| < \frac{\varepsilon}{N \max(|u_0|, \dots, |u_N|)}$$

Par conséquent si $M = \max(M_0, \dots, M_N)$

et si $n \geq M$ alors

$$0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{N-1} \binom{n}{p} u_p \right| \leq \frac{\varepsilon}{N \cdot \max\limits_{0\leq p\leq N}(|u_p|)} \sum_{p=0}^{N-1} |u_p| \leq \varepsilon ?$$

De plus $0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=N}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| \leq \frac{1}{2^n} \sum_{p=N}^{n} \binom{n}{p} \varepsilon \leq \varepsilon$

Le point d'interrogation se justifie par le fait que $2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \geq \sum_{p=N}^{n} \binom{n}{p}$.

Ainsi $0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| \leq \varepsilon (1+1)$

Finalement $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$

$$0 \leq \left| \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p \right| \leq 2\varepsilon$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} u_p = 0$ $\square$