Analyse 1

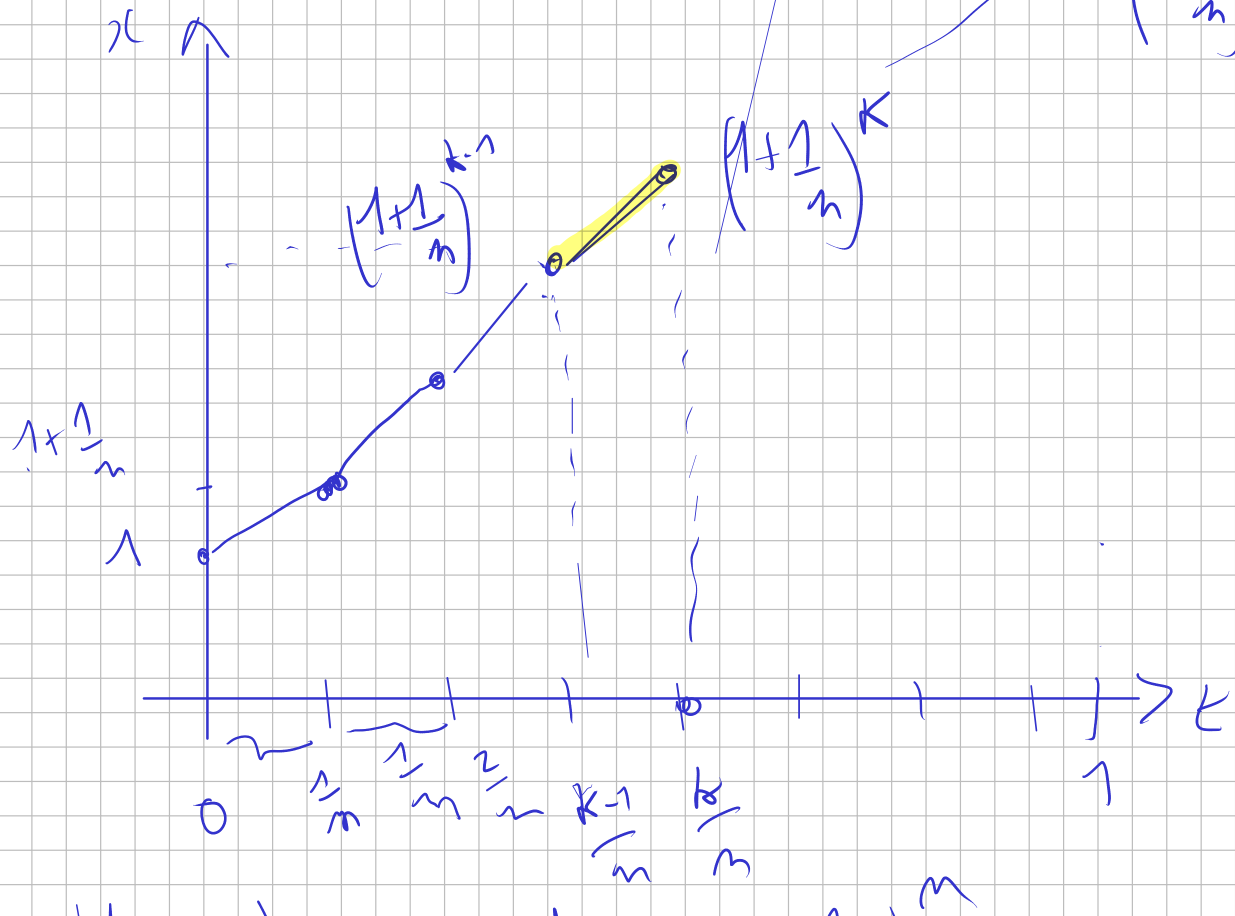
M1 MEEF PLC MATHS

26/11/2020

Les volontaires proposent des solutions aux questions de leur choix parmi les 42 envoyées le 14/11

question 8 corrigée

Commentaire sur l'exemple donné en réponse à la question 8. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$



Manière rigoureusement $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ça ressemble à $\exp(1)$

De façon rigoureuse $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^1$

De façon générale

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

$$\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \exp^{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}$$

or $$n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{1/n}$$

c'est le taux d'accroissement

de $x\mapsto \ln(1+tx)$ entre 0 et x
(avec $x = 1/n$)

et donc lorsque $x\to 0$ ça tend vers la dérivée de $\ln(1+tx)$ en 0 et donc ça tend vers t

ainsi $$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) = t$$

et par exponentiation

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = e^t$$

Question 33 corrigée. Il est indiqué

qu'il faut être prudent avec l'usage des petits o et grands O.

Question 29 N/A

Question 37 N/A

Question 41

Soit $f(x) = \exp(-1/x^2) \sin(1/x)$ si $x \neq 0$

$f(0) = 0$

Cette fonction est C^∞

Ses zéros sont 0, et les nombres $\frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{Z}^*$.

En restriction à $[-1, 1]$ elle a une infinité de 0.

Cette relation est contraire, car $f(n) = 0$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend

Vérifions que $f(x_2) \neq 0$.

question 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge.
Soit l la limite. Soit $\varepsilon > 0$
d'après la définition de limite
il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que si
$n \in \mathbb{N}$ et $n \geq N_0$ alors
$$l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$$
Donc u_n est bornée
à partir du rang N_0
Et les termes $u_0, u_1, \ldots, u_{N_0-1}$
sont bornés (car il y a un nombre fini de termes)
$\min(u_0, \ldots, u_{N_0-1}) = m$ et
$\max(u_0, \ldots, u_{N_0-1}) = M$

Donc si $n \in \mathbb{N}$

$$\min(\ell-\varepsilon, m) \leq u_n \leq \max(\ell+\varepsilon, M)$$

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

question 19 Continuité de $\mathbb{Q}$.

Soit x un réel. Soit $n \in \mathbb{N}$

Soit $x_n = \dfrac{E(nx)}{n}$

On peut toujours trouver n tel que x_n soit proche de x.

C'est à dire si $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$ alors

$$\left| x - \frac{E(nx)}{n} \right| < \varepsilon$$

c'est à dire

$$\boxed{\frac{E(nx)}{n} - \varepsilon < x < \frac{E(nx)}{n} + \varepsilon}$$

donc $\underbrace{E(nx) - n\varepsilon}_{} \leq nx \leq \underbrace{E(nx) + n\varepsilon}_{}$ $(*)$

On sait que

$$E(nx) \leq nx < E(nx) + 1 \quad (**)$$

Donc si $n\varepsilon > 1$ c'est à dire si $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$

alors

$$E(nx) - n\varepsilon < E(nx) - 1 < nx < E(nx) + 1 < E(nx) + n\varepsilon$$

Finalement si $\varepsilon > 0$

Si on pose $n_0 = 1 + E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

alors si $n \geqslant n_0$ on a

$$\left| \frac{E(nx)}{n} - x \right| < \varepsilon$$

Donc la suite $\left(\frac{E(nx)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$

tend vers x.

Aussi $f\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = 1$

et donc $\lim f\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = 1$

Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $f(x) = 0$.

On a vu que la suite $x_n = \frac{E(nx)}{n}$

converge vers x mais $\lim f(x_n) \neq f(x)$

Donc f n'est pas continue en x.

Il reste à montrer que si $x \in \mathbb{Q}$ alors f n'est pas continue en x.

Soit a un irrationnel ($\sqrt{2}$ par exemple)

Soit $y = x - a$. Il existe $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers y d'après le début

On pose $x_n = a + y_n$

alors puisque $a \notin \mathbb{Q}$ et que $y_n \in \mathbb{Q}$

$x_n = a + y_n \notin \mathbb{Q}$ et par continuité puisque $\lim y_n = y = x - a$,

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim x_n = x - a + a = x$

Donc on a $\lim (x_n) = x$

si x rationnel $f(x) = 1$ puisque $x_n \notin \mathbb{Q}$

$f(x_n) = 0$ et donc $\lim f(x_n) = 0 \neq 1 = f(x)$

Donc f n'est pas continue en x.