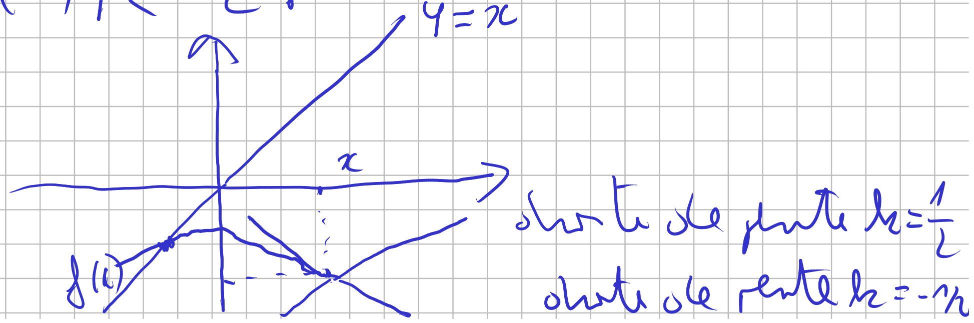
Analyse 1
M_1 Meef PLC Maths
12/11

Avant d'aborder les exercices sur les suites récurrentes regardons l'exercice 41

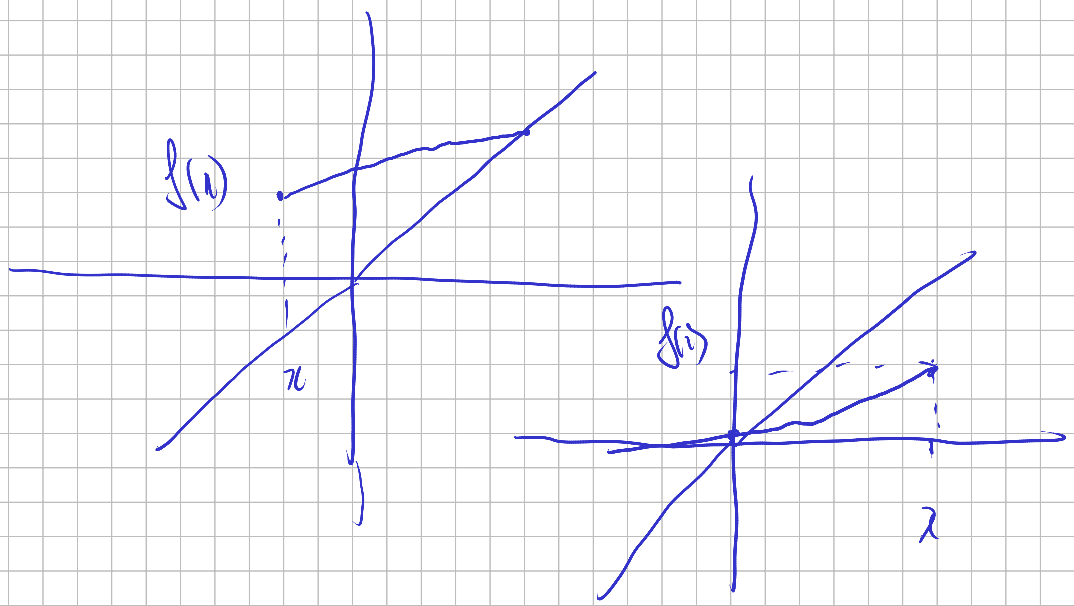
<u>Ex 41</u>. Voir Corrigé, quelques conséquences. Se souvenir que l'exercice traduit le fait que si on fait un déplacement dans un espace limité $[-M_0, M_0]$ avec une accélération/freinage limité par $[-M_2, M_2]$ alors la vitesse est contrôlée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

<u>Ex 44</u>. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle qu'il existe $k \in]0,1[$ qui vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f'(x)| \leq k$.

<u>1ère étape</u>



2ème dem — le cas où f est croissante $k = \frac{1}{2}$



Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = f(x) - x$

La fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x) - 1$

On $|f'(x)| \leq k < 1$ donc $(-k \leq f'(x) \leq k)$

$$g'(x) \leq k - 1 < 0$$

La fonction g est donc strictement décroissante.

Par l'inégalité des accroissements finis $g(x) - g(0) \leq (k-1)x$ si $x > 0$

et $g(x) - g(0) \geq (k-1)x$ si $x < 0$

$\to$ d'après le théorème des accroissements fini il existe c entre 0 et x tel que

$$\frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(c)$$

Donc $g(x) = g(0) + g'(c)x$

puisque $g' \leq k-1$,

si $x \geq 0$ on a $g'(c).x \leq (k-1).x$

$$g(x) \leq g(0) + (k-1)x$$

si $x \leq 0$ on a $g'(c).x \geq (k-1)x$

$$g(x) \geq g(0) + (k-1)x$$

Donc puisque $\lim_{x\to+\infty} g(0)+(k-1)x = -\infty$

par comparaison $\lim_{+\infty} g(x) = -\infty$

puisque $\lim_{x\to-\infty} g(0)+(k-1)x = +\infty$

par comparaison

$\lim_{-\infty} g(x) = +\infty$

Ensuite la surjectivité de g

Soit $y \in \mathbb{R}$. Puisque $\lim_{+\infty} g = -\infty$ il existe $a \in \mathbb{R}$

tel que $g(a_y) < \cancel{0}\, y$.

$\lim_{-\infty} g = +\infty$ il existe $b_y \in \mathbb{R}$

tel que $g(b_y) > \cancel{0}\, y$

Or g est continue et $g(a_y) < y \cancel{0} < g(b_y)$

donc d'après le th de valeurs intermédiaires appliqué à $g_{|[\alpha,\beta]}$ avec $\alpha=\min(a,b)$, $\beta=\max(a,b)$ il existe $c_y\in[\alpha,\beta]$ tel que $g(c_y)=\cancel{0}\,y$ c'est à dire $f(c)=c$.

Donc $\forall y\in\mathbb{R}\ \exists c\in\mathbb{R} / g(c)=y$
$\to g$ surjective

Le point fixe est unique car, puisque $g'<0$ la fonction g est strictement décroissante donc injective. Il existe donc un unique $c\in\mathbb{R}$ tel que $g(c)=0$, c'est à dire $f(c)=c$.

$\square$ Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $x\mapsto h(x)=1+\ln(\operatorname{ch}(x))$

avec $\operatorname{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $\quad h'(x)=\dfrac{\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

On a $h'(x)=\dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}=\operatorname{th}(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

Majoration du numérateur $\to$ $|e^x-e^{-x}|<e^{|x|}$ car $e^{|x|}>e^{-|x|}$ et $e^{|x|}\geq e^x, e^{-x}$

on a $|e^x+e^{-x}|>e^{|x|}$ $\leftarrow$ Minoration du dénominateur

Donc $|h'(x)|=\dfrac{|e^x-e^{-x}|}{|e^x+e^{-x}|}<\dfrac{e^{|x|}}{e^{|x|}}=1$

Résolvons $h(x)=x$ c'est à dire $x=1+\ln(\operatorname{ch}(x))$

Soit x une solution : On a $x=1+\ln(\operatorname{ch}(x))\Rightarrow x-1=\ln(\operatorname{ch}(x))$

$\Rightarrow e^{x-1}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\Rightarrow 2e^x/e=e^x+e^{-x}$

$\Rightarrow e^x\left(\frac{2}{e}-1\right) = +e^{-x}$

$\Rightarrow e^{2x} = \dfrac{e}{2-e}$

Or $e > 2$ donc $2-e < 0$ $\quad \dfrac{e}{2-e} < 0$

Mais $\exp(\mathbb{R}) =]0,+\infty[$ donc $\exp(2x) > 0$. Ainsi on a

$$0 < e^{2x} = \frac{e}{2-e} < 0$$

Donc il y a une impossibilité il n'existe pas x solution de $h(x) = x$

$\boxed{\text{Attention}}$ $|h'| < 1$ Mais il n'existe pas $k \in]0,1[$ tel que $|h'| \leq k$!

Pourquoi un tel k n'existe pas ?

Parce que $\lim\limits_{+\infty} h'(x) = \lim\limits_{+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$

<u>Exo 47</u>. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}}$

1) Résoudre $f(x) = x$.

Soit x une solution $x = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \Rightarrow x^2 = \frac{1+x}{2}$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

Résolution $2x^2 - x - 1 = 0$ (E)

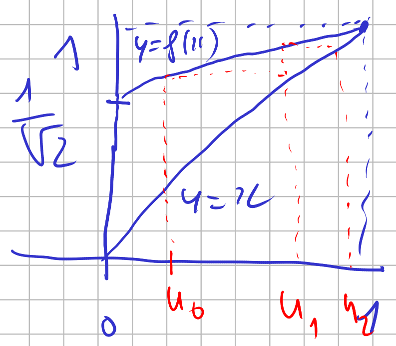
$\Delta = 1 + 8 = 9 = 3^2$ donc les racines de (E)

sont $x_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{1+3}{4} = 1 = x_2$

Si x pt fixe de f alors $x = -\frac{1}{2}$ ou $x = 1$.
Mais le domaine de f est $[0,1]$ donc si x pt fixe de f alors $x = 1$.
De plus on a bien $f(1) = \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1$. Donc la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ admet un unique point fixe qui est $\ell = 1$.

b) Soit $x \in [0,1]$ $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$ donc
$f(x)^2 = \frac{x+1}{2}$ donc $f(x)^2 - x^2 = \frac{x+1-2x^2}{2}$
donc $f(x)^2 - x^2 = (x-1)(\frac{1}{2} - x)$
Donc $f(x)^2 - x^2$ est positif ou nul sur $[-\frac{1}{2}, 1]$
Donc si $x \in [0,1] \subset [-\frac{1}{2}, 1]$ $f(x)^2 \geq x^2$
En prenant des racines puisque $f \geq 0$ et $x \geq 0$
On a $f(x) \geq x$.

2)



Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$
$u_{n+1} = f(u_n)$.

1re étape Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien défini

Il suffit de vérifier que $f([0,1]) \subset [0,1]$

Faisons cette vérification.

Soit $x \in [0,1]$ donc $0 \leq x \leq 1$.

Ceci entraîne $0 \leq \frac{1+0}{2} \leq \frac{1+x}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1$

donc $0 \leq \frac{1+x}{2} \leq 1$

donc, puisque $\sqrt{\ }$ est une bijection de $[0,+\infty[$

dans $[0,+\infty[$ $0 = \sqrt{0} \leq \sqrt{\frac{1+x}{2}} \leq \sqrt{1} = 1$

Ainsi si $x \in [0,1]$ $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{2}} \in [0,1]$

et donc $f([0,1]) \subset [0,1]$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

2e étape Puisque $f([0,1]) \subset [0,1]$ on a que si $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq u_n \leq 1$

et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Puisque $f(x) \geq x$ il vient si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Puisqu'elle est majorée elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$

(toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a même limite si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite)

limite d'une suite image par une application continue

On $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et puisque f continue sur $[0,1]$ et que $\ell \in [0,1]$

$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$ Ainsi $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = 1$

$\square$

Exo 50. Soit $a, b \geq 0$, $a \neq b$ et soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$a_0 = a$ $b_0 = b$ et si $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) \qquad b_{n+1} = \sqrt{ab}$$

1) Soit $n=1$ $a_1 = \frac{1}{2}(a_0+b_0)$ $b_1 = \sqrt{a_0 b_0}$

(On doit dire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies car la racine est bien définie et la moyenne aussi sur $[0,+\infty)$)

$$a_1^2 = \frac{1}{4}(a_0^2 + 2a_0b_0 + b_0^2) \qquad b_1^2 = a_0 b_0$$

donc $a_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{4}(a_0^2 - 2a_0b_0 + b_0^2) = \frac{1}{4}(a_0 - b_0)^2 > 0$

donc $a_1^2 - b_1^2 > 0$. car $a_0 \neq b_0$

Ainsi $a_1 > b_1$.

Montrons que si $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n > b_n$ (récurrence)

- Vrai au rang $n=1$ (cf ci-dessus).
- Hérédité soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On suppose $a_n > b_n$

Alors

$$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2) \qquad b_{n+1}^2 = a_n b_n$$

donc $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2) = \frac{1}{4}(a_n - b_n)^2 > 0$

donc $a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 > 0$. car $a_n \neq b_n$

Ainsi $a_{n+1} > b_{n+1}$. $\square$

Donc on a prouvé par récurrence que
$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a_n > b_n$.

Calculons $a_{n+1} - a_n$ si $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - a_n = \frac{1}{2}(b_n - a_n) < 0$$

car $b_n < a_n$

Donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Calculons $b_{n+1} - b_n$ si $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - b_n = \sqrt{a_n b_n} - \sqrt{b_n^2}$$
$$= \sqrt{b_n}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right) > 0$$

Car $a_n > b_n$ et $\sqrt{\ }$ est strictement croissante.

Donc $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

2) Pour voir que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puisque la 1ère est décroissante et la seconde croissante il suffit de montrer $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$
$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) - \sqrt{a_n b_n}$$
$$= \frac{1}{2}\left(a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\right)^2$$

$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})$

car $0 \leq \sqrt{a_n} - \sqrt{b_n} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$

$|a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|a_n - b_n|$

On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 \leq |a_{n+1} - b_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n}|a_1 - b_1|$

Or $\frac{1}{2^n}|a_1 - b_1| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc par le théorème de comparaison

$\lim_{+\infty} |a_n - b_n| = 0$ donc les suites sont bien adjacentes.

$\longrightarrow$ Elles ont même limite.

3) si $a = b$ $\quad a_n = b_n = a = b \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Fin de la séance.