Analyse 1
09/11
Corrigé des exercices à rendre

Exo 1.

1) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

On $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (\sqrt{n} + \sqrt{n+1}) = +\infty$

Par passage à l'inverse $\lim\limits_{+\infty} u_n = 0$

b) $u_n \to 1$ éventuellement parce que $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[+\infty]{} 0$

Ce est [illegible] tableau

[illegible] | 1) $f(x) = x - \ln(x)$ si $x \geq 1$
$f'(x) = 1 - 1/x \geq 0$ donc f croissante
donc $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ si $x \geq 1$

donc $x \geq \ln x$ si $x \geq 1$

2) $0 \leq \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{2\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \times \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leq \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ si $x \geq 1$

(car $\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$)

3) Par le théorème de comparaison puisque $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

c) Ici il est important de faire apparaître $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ avec $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ dire que c'est une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1 donc convergente vers 0 (car $a < b$) ou $\left(\dfrac{b}{a}\right)^n$ avec $0 < \dfrac{b}{a} < 1$ (cas $b < a$)

il est insuffisant d'écrire

$\dfrac{a^n}{b^n} \to 0$.

d) Quand on veut majorer un quotient de nombres positifs il suffit de majorer le numérateur et de minorer le dénominateur.

Ici on a $\left\| 0 \leq u_n \leq \dfrac{2n^2}{2^{n-1}} = \dfrac{4n^2}{2^n}\right.$ si $n \geq 2$

en effet $|\cos(n)| \leq 1$ et $|\sin(n)| \leq 1$

donc $|n^2 + \cos(n)| \leq n^2+1 \leq 2n^2$ si $n \geq 1$

$|2^n + \sin(n)| \geq |2^n - 1| \geq 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$

si $n \geq 1$

Donc par quotient $0 \leq u_n \leq \dfrac{2n^2}{2^{n-1}} = \dfrac{4n^2}{2^n}$

c) Dans le vrai est que $u_n = \dfrac{1}{n}$

le mieux est de l'établir par récurrence ou d'observer que

$$u_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{k}\right)$$

argument télescopique pour un produit

donc il reste $u_n = \dfrac{1}{n}$

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

<u>Exo 2</u> a) b) c) Il faut être prudent, e dans l'encadrement d'un quotient.

en particulier $1-t \leq \dfrac{1}{1+t}$ car

$(1-t^2) = (1-t)(1+t) \leq 1$ si $t \in]0,1[$

Attention on n'a pas affaire à des séries numériques

(Série numérique $S_n = \sum_{k=1}^{n} s_k$ où $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite)

↑ ici s_k ne dépend pas de n

/Là, si

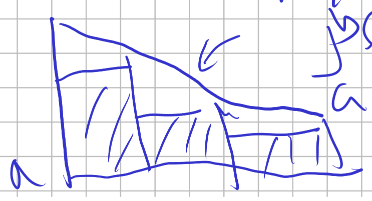
a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$ ← $s_n(k)$

Confusion. À k fixé, ce n'est pas parce que $\lim_{n \to +\infty} s_n(k) = 0$ que $u_n \to 0$

a) b) c)

d) → Reconnaître une somme de Riemann

⚠ Une somme de Riemann tend vers l'intégrale de la fonction associée. Mais ce n'est pas l'intégrale



$\int_a^b f \neq S_n$ mais $S_n \longrightarrow \int_a^b f$

Ne pas penser trop tôt à la limite.

Principe avec le critère de comparaison (théorème des gendarmes)

On a $u_n \leq v_n \leq w_n \quad \forall n \geq N$

Si $\lim_{+\infty} u_n$ existe, si $\lim_{+\infty} w_n$ existe et si $\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} w_n$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et c'est

$\lim_{+\infty} u_n = \lim_{+\infty} v_n$

Regardons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ on ne peut pas dire que u_n cv car c'est une somme de nombres positifs. Car

lim $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0$

e) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ ← indépendant de n

↳ série

u_n est croissante car $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(k+1)!} \geq 0$ Montrons la converge en majorant la suite.

Méthode 1 ∘ Montrer que $k! \geqslant 2^k$ si $k \geqslant 4$

Preuve par récurrence ∘ $k=4$ $\quad 4! = 24 \geqslant 16 = 2^4$

Initialisation

∘ soit $k \geqslant 4$ tel que $k! \geqslant 2^k$

on a $k+1 \geqslant 5 \geqslant 2$ donc

$(k+1)! = (k+1)k! \geqslant 2 \times 2^k = 2^{k+1}$ hérédité

∘ On a donc

$$u_n \leq \underset{\leq 1}{1} + \underset{\leq 1}{\frac{1}{2}} + \underset{\leq 1}{\frac{1}{6}} + \underbrace{\sum_{k=4}^{n} \frac{1}{2^k}}_{\leq 2} < 5$$

Méthode 2 . $k! \geqslant k(k-1)$ si $k \geqslant 2$

Donc $u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$

$\left(\text{car } \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$ télescopique

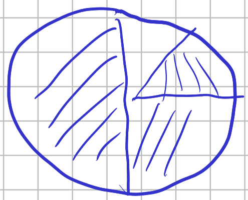
$= 1 + \underbrace{1 - \frac{1}{n}}$

$= 2 - \frac{1}{n}$

$u_n \leq 2$

Question pourquoi $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leq 1$?

$= 1 - \frac{1}{2^n}$



8) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ 1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

u_n croissante.

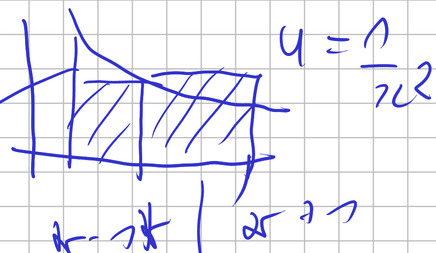
2) Pourquoi u_n est majorée

• $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ si $k \geq 2$

Donc $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n}$

$= 2 - \frac{1}{n}$

• autre méthode



dire que

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx \geq \frac{1}{k^2} \geq \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

En sommant pour k variant entre 2 et n

on a

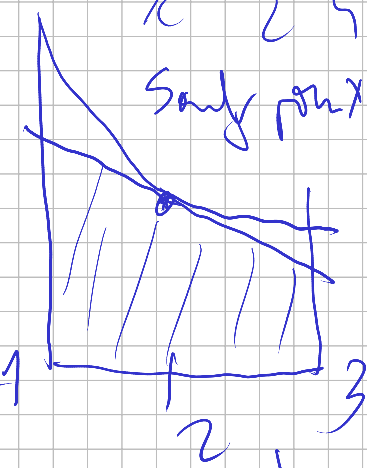
$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{1}{x^2}\,dx}$$

$$\int_{1}^{n} \frac{1}{x^2}\,dx \geq u_n - 1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \geq \int_{2}^{n+1} \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$\left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)$

Sauf pour $x = 2$



Exo 3. $\ln(3) > 1$ car

Exo 4 (Voir corrigé Corrigé ou le CR de la séance corrigé).

Exo 5 On veut montrer la continuité de $\sqrt{x}$ en 4. On prend donc $\varepsilon > 0$. On veut trouver $\eta > 0$ tel que si $x \in [0, +\infty)$ et si $|x-4| < \eta$ alors $|\sqrt{x} - 2| < \varepsilon$

On calcule $|\sqrt{x}-2|$ si $x \geq 0$

$$|\sqrt{x}-2| = |x-4| \times \frac{1}{\sqrt{x}+2} \quad (*)$$

(multiplication par $\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$)

On a $\sqrt{x}+2 \geq 2 > 0$ donc $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2}$

donc $|\sqrt{x}-2| \leq \frac{1}{2}|x-4|$

On souhaite que $\frac{1}{2}|x-4| < \varepsilon$

c'est-à-dire si $|x-4| < 2\varepsilon$

Posons $\eta = 2\varepsilon$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, si $x \geq 0$ et $|x-4| < \eta$,

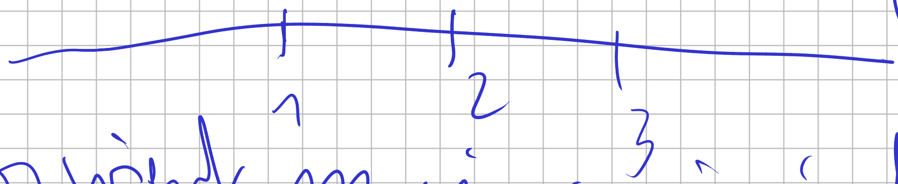
alors $|\sqrt{x}-2| = \frac{1}{\sqrt{x}+2}|x-4| \leq \frac{1}{2}|x-4| < \frac{\eta}{2} = \varepsilon$

On veut montrer la continuité de x^3 en 2 ie

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-2| < \eta \Rightarrow |x^3-8| < \varepsilon$

On $|x^3-8| = |x-2| \times |x^2+2x+4|$

Soit $\varepsilon > 0$ on cherche un $\eta > 0$ qui



convient mais qui n'est pas "grand"

Par exemple on prend $\eta \leq 1$.

Si x vérifie $|x-2| < \eta$ et si $\eta \leq 1$

alors $1 < x < 3$

Maximum x^2+2x+4 sur $[1,3]$

$|x^2+2x+4| \leq |3^2+2\times 3+4|$ sur $[1,3]$

≤ 19

Donc si $\eta \in]0,1]$ et si

$|x-2| < \eta$ alors $|x^2+2x+4| \leq 19$

et $|x^3-8| \leq |x-2|\,|x^2+2x+4| < 19\eta$

Si on prend $19\eta = \varepsilon$ c'est à dire $\eta = \dfrac{\varepsilon}{19}$ alors

$|x^3-8| < \varepsilon$ si $|x-2| < \eta$

Si $\varepsilon \geq 19$ alors $\eta \geq 1$ Hic!

Choisissons $\eta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{19}\right)$

alors si $|x-2| < \eta$

on a $|x^2+2x+4| < 19$ et

car $1 < x < 3$

et $|x^3-8| = |x-2|\,|x^2+2x+4| < \eta\, 19 \leq \frac{\varepsilon}{19} \times 19$

$|x^3-8| \leq \varepsilon$

Exo Continuité uniforme

f unif continue sur I si

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in I$

$|x-y| < \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$

le cas de $\sin(x)$ — soit $x, y \in \mathbb{R}$

$|\sin(x) - \sin(y)| = |\sin'(c)|\,|x-y|$

avec c entre x et y

(Th des accroissement finis)

On $|\sin'| = |\cos| \leq 1$ donc

$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x-y|$

Donc $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0$ prendre $\eta = \varepsilon$

$\forall x, y \in \mathbb{R}\ |x-y| < \eta \Rightarrow |\sin(x) - \sin(y)| < \varepsilon$

° le cas de $f(x) = \sin(x^2)$

On va montrer qu'elle n'est pas unif continue

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \longrightarrow +\infty$$

$$y_n = \sqrt{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n} \longrightarrow +\infty$$

On $\sin(x_n) = 1$ $\sin(y_n) = -1$

alors $|f(x_n) - f(y_n)| = 2$.

$$|x_n - y_n| = \frac{\pi}{x_n + y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrons maintenant que

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}\ |x-y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

est faux. C'est à dire que

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \eta > 0 \ \exists x, y \in \mathbb{R} \ |x-y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$

intervertir ~~x~~ On choisit $\varepsilon = 2$

Prenons $\varepsilon = 2$ (ou $\varepsilon = 1$)

Soit $\eta > 0$ puisque $|x_n - y_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - y_n| < \eta$.

Par construction on a $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 \geq \varepsilon$

Donc finalement en prenant $\varepsilon = 2$

on a si $\eta > 0$ l'existence de $x, y \in \mathbb{R}$

tels $|x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.