Séance du 05/11

Analyse.

Question d'échauffement.

Soit $P = ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$

Soit $u \in \mathbb{R}$ fixé

Donner une condition pour que

$P(x) > 0$ si $x \geq u$.

Réponse.

Réponse 1 Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

Alors $P(x) > 0$ si $x \in \mathbb{R}$.

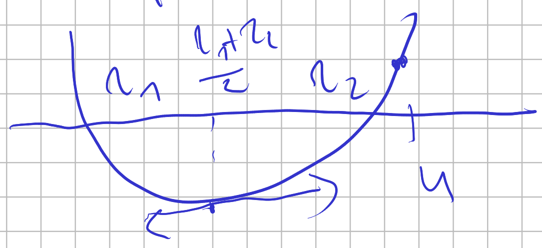
Réponse 2 Si $\Delta \geq 0$ on calcule

les racines de P $r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \leq r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $r_2 < u$ alors $P(x) > 0$ si $x \geq u$

et si $u \leq r_2$ alors il existe $x \geq u$, prendre $x = x_2$ tel que $P(x) = 0$

Réponse 3.



∘ On a

$$\left(\forall x \geq u \quad P(x) > 0\right)$$

ssi

$$\begin{cases} P(u) = au^2 + bu + c > 0 \\ u \geq \dfrac{x_1+x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

∘ On a aussi si $r \in \mathbb{R}$ donné

$$\left(\forall t \leq r \quad P(t) > 0\right)$$

ssi

$$\begin{cases} P(r) > 0 \\ r \leq \dfrac{x_1+x_2}{2} \end{cases}$$

↳ mais ça n'est pas la question posée initialement.

Exo 46.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+2}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$

et si $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) Établir $|f(x) - f(y)| \leq \frac{3}{4} |x-y|$

La fct f est C^1 donc d'après le

th des accroissements finis si $x, y \in \mathbb{R}$

il existe z compris entre x et y tel que

$$\left(f(x) - f(y)\right) = f'(z)(x-y).$$

Donc si on montre que $|f'|$ est

majorée par $\frac{3}{4}$ sur $\mathbb{R}$ on aura

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \leq \frac{3}{4}|x-y|$$

Montrons donc la majoration de $|f'|$

par $3/4$.

Calculons f' : $f'(x) = \frac{2x}{(x^2+2)^2}$

• Minimisons $x^2+2-2x = P(x)$

$P'(x) = 2x-2$ $P'(x) = 0$ si $x = 1$.

On a alors $P(1) = 1$

donc $x^2+2 \geqslant 2x$ si $x \in \mathbb{R}$

$\left|\frac{2x}{x^2+2}\right| \leqslant 1$ en effet

$|2x| = 2|x| \leqslant |x|^2 + 2 = |x^2+2|$

donc $|P'(x)| \leqslant \left|\frac{2x}{x^2+2}\right| \times \frac{1}{|x^2+2|}$

$\leqslant \frac{1}{|x^2+2|} \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{3}{4}$

2) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ,

alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Or

$u_{n+1} = f(u_n)$ donc les suites

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$

ont la même limite ℓ.

Or f est continue, donc la limite de $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est $f(\ell)$

Ainsi $f(\ell) = \ell$.

Cherchons donc les points fixes de f. C'est à dire les ℓ réel que $f(\ell) = \ell$: $\dfrac{\ell^2+1}{\ell^2+2} = \ell$.

À nous de résoudre cette équation

- Si $\dfrac{\ell^2+1}{\ell^2+2} = \ell$ alors $\ell > 0$ et

$\ell^3 + 2\ell = \ell^2 + 1$

donc $\ell^3 - \ell^2 + 2\ell - 1 = 0 = Q(\ell)$

Soient $r_1\ r_2\ r_3$ les racines complexes de Q $\quad r_1 + r_2 + r_3 = 1$

[Remarque $(X-a_1)\cdots\cdots(X-a_n) =$
$X^n-(a_1+\cdots+a_n)X^{n-1}+\cdots\cdots+(-1)^n a_1\cdots a_n$]

$r_1 r_2 r_3 = 1$? Explication

Dans le cas de Q. On a

$Q(\ell) = \ell^3 - \ell^2 + 2\ell - 1$
$= (\ell-r_1)(\ell-r_2)(\ell-r_3)$

$\left(= \ell^3-(r_1+r_2+r_3)\ell^2+\cdots-(r_1 r_2 r_3)\right.$
application de la remarque

On a vu que $\ell > 0$ nécessairement.
donc P n'a pas de racine négative.

Donc $r_1, r_2, r_3 \geqslant 0$ on a

$r_1+r_2+r_3 = 1$ donc $0 \leqslant r_1, r_2, r_3 \leqslant 1$

Donc les points fixes de f sont dans $[0,1]$.

On a $f(0) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = \frac{2}{3}$

Soit $g(x) = f(x) - x$

On a g continue $g(0) = \frac{1}{2}$ $g(1) = -\frac{1}{3}$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $l \in [0,1]$ tel que $g(l) = 0$ c'est à dire $f(l) = l$. On a trouvé un point fixe.

Est-il unique ?

<u>Méthode 1</u> en montrant que $g_{|[0,1]}$ est strictement décroissante : $g'(x) = \frac{2x}{(x^2+2)^2} - 1$

$$g'(x) = \frac{2x - (x^2+2)^2}{(x^2+2)^2}$$

or si $x \in]0,1[$ $|2x| < 1$ et $(x^2+2)^2 > 4$

Donc $2x-(x^2+2)^2<0$ et

$g'(x)<0$ Ainsi g est

strictement décroissante sur $]0,\pi[$

et g ne s'annule donc qu'une fois

Ainsi le point fixe est unique.

<u>Méthode 2</u> Soit l_1, l_2 deux pts fixes

de f on a $f(l_1)=l_1$ et $f(l_2)=l_2$

D'après la question 1 on a aussi

$$|f(l_1)-f(l_2)|\leq\frac{3}{4}|l_1-l_2|$$

Donc $|l_1-l_2|\leq\frac{3}{4}|l_1-l_2|$

Ceci implique que $\frac{1}{4}|l_1-l_2|\leq 0$

et donc $|l_1-l_2|=0$ et donc $l_1-l_2=0$

c'est à dire $l_1=l_2$

Le point fixe est unique $\square$

Finalement Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique pt fixe de f et ce point fixe appartient à $]0,1[$.

Il reste à montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Revenons à l'inégalité de 1) appliquée à $x = u_n$ et $y = \ell$ $\forall n \in \mathbb{N}$

On a $|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{3}{4} |u_n - \ell|$

or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$

alors $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{3}{4} |u_n - \ell|$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \qquad (\#_n)$$

La propriété (H_0) est vraie : c'est juste écrire $|u_0-\ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 |u_0-\ell|$ qui est vraie car $\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Supposons (H_n) vraie

On a donc $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0-\ell|$

Or $|u_{n+1}-\ell| = |f(u_n)-f(\ell)| \leq \left(\frac{3}{4}\right) |u_n-\ell|$ d'après la question 1 et le fait que $f(\ell)=\ell$ et $f(u_n) = u_{n+1}$.

Ainsi $|u_{n+1}-\ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right) |u_n-\ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0-\ell|$

$$|u_{n+1}-\ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} |u_0-\ell|$$

Et donc H_{n+1} est vérifiée si H_n l'est. Ça achève la récurrence

Puisque $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$

et puisque $\left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

(suite géométrique de raison en valeur absolue strictement inférieure à 1), d'après le théorème des gendarmes,

$|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$\lim (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

<u>Conclusion</u> La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle converge vers l'unique point fixe ℓ de f, avec $\ell \in]0,1[$ et $\forall$ $n \in \mathbb{N}$ $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n |1 - \ell|$ $u_0 = 1$

$\leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ (car $0<\ell<1$)

3) On cherche $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \in \mathbb{N}$
$|u_n - \ell| \leq 10^{-5}$.

Puisqu'on sait que $|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$
il suffit de trouver N tel que
$\left(\frac{3}{4}\right)^N \leq 10^{-5}$ car alors on
aura si $n \geqslant N$

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^N \leqslant 10^{-5}.$$

Cherchons

$\frac{3}{4}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} < \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$

Donc $\left(\frac{3}{4}\right)^{60} = \left(\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^4\right)^5 \leq \left(\left(\frac{1}{2}\right)^4\right)^5 = \left(\frac{1}{16}\right)^5 \leq \frac{1}{10^5}$

$N = 60$ convient.

C'est fini pour aujourd'hui