Analyse 1.

02 novembre 2020

Exercice 36.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^2, $f(0) = f'(0) = 0$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par

$g(x) = f(\sqrt{x})$ si $x \geq 0$

$g(x) = f(-\sqrt{-x})$ si $x \leq 0$.

1) La fonction $g_{|]0,+\infty[}$ et la fonction $g_{|]-\infty,0[}$ sont des composées de fonctions C^1, elles sont donc C^1.

2) Pour montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$, puisque $g_{|\mathbb{R}^*}$ est C^1 il suffit de montrer sa continuité en 0.

On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} = 0$ et

$\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} f(t) = 0$ donc

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(\sqrt{x}) = 0 = g(0)$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = 0 = g(0)$

De même $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} -\sqrt{-x} = 0$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(-\sqrt{-x}) = 0 = g(0)$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = 0 = g(0)$

Ceci montre que les limites à

gauche et à droite de g en 0 sont $g(0)$. C'est-à-dire g est continue en 0.

3) Calcul de g' si $x \neq 0$

si $x > 0$ $\quad g'(x) = f'(\sqrt{x}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

si $x < 0$ $\quad g'(x) = f'(-\sqrt{-x}) \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{\sqrt{-x}}$.

- On a donc si $x > 0$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \frac{f'(\sqrt{x}) - f'(0)}{\sqrt{x} - 0}$$

c'est le taux d'accroissement de f (dérivée par 2) entre $\sqrt{x}$ et 0. On

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g'(x) = \frac{1}{2} f''(0)$

- On a donc si $x < 0$

$$g'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{f'(-\sqrt{-x}) - f'(0)}{-(-\sqrt{-x} - 0)}$$

on reconnaît $-\frac{1}{2}$ du taux d'accroissement de f' entre $-\sqrt{-x}$ et 0 si $x<0$

À la limite parce que $\lim\limits_{x\to 0} -\sqrt{-x} = 0$

on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} g'(x) = -\frac{1}{2} f''(0)$

4) Pour savoir si g est dérivable en 0 on s'intéresse à $\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$ (le taux d'accroissement) et sa limite éventuelle en 0.

• si $x>0$ $\quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{f(\sqrt{x})}{x}$

• si $x<0$ $\quad \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{f(-\sqrt{-x})}{x}$

On a $f(t) = f(0) + t f'(0) + \frac{t^2}{2} f''(0) + t^2 \varepsilon(t)$

avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ car f C^2 -

on $f(0) = f'(0) = 0$ donc

$f(t) = \frac{t^2}{2} f''(0) + t^2 \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon = 0$

Donc si $x > 0$ $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(\sqrt{x})}{x}$ on prend $\sqrt{x} = t$

$= \frac{1}{2} f''(0) + \varepsilon(\sqrt{x})$

donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{1}{2} f''(0)$

Donc g est dérivable à droite en 0 et

$g'_d(0) = \frac{1}{2} f''(0)$.

Donc si $x < 0$ $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{f(-\sqrt{-x})}{x}$

$= -\frac{1}{2} f''(0) - \varepsilon(-\sqrt{-x})$

en ayant pris $t = -\sqrt{-x}$ $(t^2 = -x$ donc $x = -t^2)$

donc $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\frac{1}{2} f''(0)$

Donc g est dérivable à gauche en 0 et $g'_g(0) = -\frac{1}{2} f''(0)$.

Finalement g est dérivable en 0 ssi g'_d et g'_g existent et sont égales c'est à dire ssi

$$f''(0) = 0.$$

Pour que g soit C^1 il faut et il suffit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} g'(x)$ existe (c'est à dire d'après 3) que $f''(0)=0$) et que $g'(0)$ existe (c'est à dire d'après ce qui vient d'être fait que $f''(0)=0$).

Finalement g est C^1 si et seulement si $f''(0)=0$. Ici on établit le résultat sans utiliser le théorème qui dit que [$h : I \to \mathbb{R}$ est C^1 ssi $h_{|I \setminus \{a\}}$ est C^1 et $\lim_a h'$ existe et est finie].

Exercice 37 -

On considère $n \in \mathbb{N}$ et
$L_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \dfrac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$.

On veut calculer $L_n(1)$. On va le faire à l'aide de la formule de Taylor Young. On utilise le fait que

$$(t^2-1)^n = (t+1)^n (t-1)^n$$
$$= (t-1)^n \left(2 + (t-1)\right)^n$$

On développe $\left(2+(t-1)\right)^n$

$$\left(2+(t-1)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (t-1)^k$$

donc $$(t^2-1)^n = (t-1)^n \left(\sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} (t-1)^k \right)$$

$$(t^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k} \binom{n}{k} (t-1)^{n+k}$$

D'après Taylor Young on a

$$(t^2-1)^n = \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!} L_i(1) (t-1)^i$$

car $L_i(1) = f^{(i)}(1)$ avec $f(t) = (t^2-1)^n$.

[Remarque Si P de d° d alors $\forall a \in \mathbb{R}$ on a $P(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{1}{k!} P^{(k)}(a) (x-a)^k$

donc si on écrit la formule de TY à l'ordre d pour un polynôme de d° d il n'y a pas de ε ou plus exactement $\varepsilon \equiv 0$]

En identifiant ce que donne Newton-Leibniz-Pascal et ce que donne Taylor-Young il vient

$$(t^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} 2^{n-k}\binom{n}{k}(t-1)^{n+k}$$

$$= \sum_{i=0}^{2n} \frac{1}{i!}\underbrace{\frac{d^i}{dt^i}\left[(t^2-1)^n\right](1)}_{=L_i(1)}(t-1)^i$$

On prend $i=n$ et $k=0$ et on identifie les coefficients obtenus.

$$\underset{k=0}{2^n\binom{n}{0}} = \frac{1}{n!}\underbrace{\frac{d^n}{dt^n}\left[(t^2-1)^n\right](1)}_{=L_n(1)} \quad i=n$$

donc $2^n \cdot 1 = \frac{1}{n!} L_n(1)$

Donc $L_n(1) = 2^n\, n!$.

Calcul de $L_n(-1)$.

On observe que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t\mapsto (t^2-1)^n$ est paire

donc $f^{(2k)}(x) = f^{(2k)}(-x)$ et

$$f^{(2k+1)}(x) = -f^{(2k+1)}(-x) \quad \forall k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$$

ie $f^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$

ou $f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x)$.

Appliqué à $f = (t^2-1)^n$ donne

$$L_n(-1) = (-1)^n L_n(1)$$
$$= 2^n n! (-1)^n.$$

Exo 3. $V_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

1) La fonction sinus est C^∞ et si $x > 0$, d'après Taylor Lagrange il existe $y \in [0, x)$ tel que

$$\sin(x) = \sin'(0)\, x + \sin'''(y) \frac{x^3}{6}$$

(T. Lagrange pour une fonction C^3)

$\sin'(0) = \cos(0) = 1 \quad \sin'''(y) = -\cos(y)$

donc $|\sin(x) - x| = |\cos(y)| \dfrac{x^3}{6}$.

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6}$$

Si $x = \dfrac{\pi}{2^n}$ on obtient

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n}\right| \leq \frac{\pi^3}{6\,(2^n)^3}$$

en multipliant par 2^n on a

$$\Big|\underbrace{2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}_{v_n} - \pi\Big| \leq \frac{\pi^3}{6\,\underbrace{(2^n)^2}_{4^n}}$$

$$|v_n - \pi| \leq \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n}$$

2) Par Taylor-Lagrange on a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\cos(y)$$

où $x > 0$ et $y \in [0, x]$ est déterminé en fonction de x.

On a car $|\sin(t)| \leq 1$

$$\left|\sin x - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^5}{120}$$

si $x = \frac{\pi}{2^n}$ il vient

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) - \frac{\pi}{2^n} + \frac{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3}{6}\right| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^5}{120}$$

donc en multipliant par 2^n il vient

$$\left|u_n - \pi + \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right| \leq \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$$

$$\left|\pi - u_n - \frac{\pi}{6 \times 4^n}\right| \leq \frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n}}$$

3) $w_n = \lambda v_{n+1} + (1-\lambda) v_n$

$$v_n = 2^n \sin \frac{\pi}{2^n}$$

$$v_{n+1} = 2^{n+1} \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

donc

$$(\pi - w_n) = \pi - \lambda v_{n+1} - (1-\lambda) v_n$$

$$= \lambda (\pi - v_{n+1}) + (1-\lambda)(\pi - v_n)$$

(vrai car $\lambda + (1-\lambda) = 1$)

$$(\pi - w_n) = \lambda \left(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right) + (1-\lambda)\left(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right)$$

$$+ \frac{\pi^3}{6 \cdot 4^n} \left[\frac{\lambda}{4} + (1-\lambda)\right]$$

Choisissons λ pour que ceci soit nul $\longrightarrow \lambda = \frac{4}{3}$

On a donc $(\pi - w_n) = \frac{4}{3}\left(\pi - v_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right) - \frac{1}{3}\left(\pi - v_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^3}\right)$

On passe aux valeurs absolues

$$|\pi - W_n| \leq \frac{4}{3}\left|\pi - V_{n+1} - \frac{\pi^3}{6 \times 4^{n+1}}\right| + \frac{1}{3}\left|\pi - V_n - \frac{\pi^3}{6 \times 4^n}\right|$$

$$\leq \frac{4}{3}\,\frac{\pi^5}{120 \times 4^{2n+2}} + \frac{1}{3}\,\frac{\pi^5}{120\; 4^{2n}}$$

$$\leq \frac{\pi^5}{120\, 4^{2n}}\left[\underbrace{\frac{4}{3} \times \frac{1}{16} + \frac{1}{3}}_{= \frac{5}{3 \times 4}}\right]$$

$$\leq \frac{\pi^5}{3^2 . 2^5} \times \frac{1}{4^{2n}}$$

On peut prendre $k = \frac{\pi^5}{3^2 . 2^5}$.

C'est fini pour aujourd'hui.