22 octobre 2020

Analyse 1
M1 MEEF PLC Maths

C'est parti !

<u>Suite : exercice 33 question 2/</u>

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right)$$ changement d'indice / à la q1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

$$< \frac{1}{\alpha-1}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha} + 1\right)$$

$$\frac{1}{1^\alpha} - \cancel{\frac{1}{2^\alpha}} + \cancel{\frac{1}{2^\alpha}} \cdots \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$$

$$< \frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + 1\right)$$

$$< \frac{1}{\alpha-1}\left(2 - \frac{1}{n^\alpha}\right) \leqslant \frac{2}{\alpha-1}$$

(S_n) est croissante et majorée donc elle est convergente.

Exercice 35. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$. Soit $\alpha \in]-1,1[$

recherchons P de d° 2 tel que $g = f + P$ vérifie $g(-1) = g(1) = g(\alpha) = 0$. Puisque $f(-1) = f(1) = 0$

Pour que $g(-1) = g(1) = 0$ il faut que $P(-1) = P(1) = 0$ et donc P est de la forme $P(x) = \lambda(x-1)(x+1)$
$= \lambda(x^2-1)$

avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $g(\alpha) = 0$ on a $0 = f(\alpha) + \lambda(\alpha^2-1)$ et donc $\lambda = -\dfrac{f(\alpha)}{\alpha^2-1}$.

En prenant λ ainsi on a bien $g(\alpha) = g(-1) = g(1) = 0$

Puisque f et P sont C^2, c'est le cas aussi de g.

D'après le théorème des accroissements finis (ou Rolle) appliqué à g sur $[-1,\alpha]$ puis sur $[\alpha,1]$ il existe $c_1 \in]-1,\alpha[$ et $c_2 \in]\alpha,1[$ tel que
$g'(c_1) = g'(c_2) = 0$

Puisque g est C^2, sa dérivée g' est C^1 et puisque $c_1 < c_2$ et $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$ il existe $c \in]c_1,c_2[$ tel que $g''(c) = 0$

Or, puisque $g(x) = f(x) + P(x)$
$$= f(x) - \frac{f(\alpha)}{\alpha^2-1}(x^2-1)$$

On a $$g'(x) = f'(x) - 2x\frac{f(\alpha)}{\alpha^2-1}$$
et donc $$g''(x) = f''(x) - 2\frac{f(\alpha)}{\alpha^2-1}$$

On a donc $g''(c) = f''(c) - \dfrac{2f(\alpha)}{\alpha^2-1} = 0$

c'est à dire $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$

Finalement, puisque $\left|\dfrac{\alpha^2-1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$ si $\alpha \in]-1,1[$

On a $|f(\alpha)| < \dfrac{1}{2} f''(c)$

en passant au sup on a

$$\sup_{\alpha \in]-1,1[} |f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} \sup_{c \in]-1,1[} f''(c)$$

Or $\sup_{\alpha \in]-1,1[} |f(\alpha)| = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$

En effet $\lim_{\substack{\alpha \to 1 \\ \alpha < 1}} |f(\alpha)| = |f(1)|$ donc $|f(1)| \leq \sup_{\alpha \in]-1,1[} |f(\alpha)|$

idem pour $|f(-1)|$ [Car f continue en -1 et 1].

donc

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| = \sup_{\alpha \in]-1,1[} |f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} \sup_{c \in]-1,1[} |f''(c)|$$

$$\leq \frac{1}{2} \sup_{c \in [-1,1]} |f''(c)|$$

$\square$

Exo 34

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Sur $\mathbb{R}^*$, f est continue en tant que somme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$

Étude en 0. Soit $x \neq 0$.

$|f(x)| = |x + 2x^2 \sin(\frac{1}{x})| \leq |x| + 2x^2 |\sin(\frac{1}{x})|$

or $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leq |u|$

donc

$$|f(x)| \leq |x| + 2x^2 \times \frac{1}{|x|}$$

$$\leq |x| + 2|x|$$

$$\leq 3|x|$$

Donc, $-3x \leq f(x) \leq 3x$

Or $\lim_{x \to 0} 3x = 0$ et $\lim_{x \to 0} (-3x) = 0$

Par le théorème des gendarmes appliqué aux fonctions $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} f(x) = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0.
On a ainsi montré que f est continue sur $\mathbb{R}$

2) Soit $x \neq 0$.

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - 1 \right| = \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| = \left| \frac{f(x)-x}{x} \right|$$
$$= \left| \frac{2x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right| = 2|x| \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Or $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq 1$

Donc $\left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - 1 \right| \leq 2|x|$

mais $\lim\limits_{x \to 0} 2|x| = 0$ donc par le lemme des gendarmes on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left| \frac{f(x)-f(0)}{x} - 1 \right| = 0$

On a ainsi montré que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \left(\frac{f(x)-f(0)}{x} \right) = 1$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$

3) Soit $\eta > 0$ considérons l'intervalle $I =]-\eta, \eta[$

f est dérivable sur I par opérations usuelles sur des fonctions dérivables

$$f'(x) = 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2 \left(-\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)$$
$$= 1 + 4x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Soit x proche de 0 tel que $\begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) = 1 \\ \sin(\frac{1}{x}) = 0 \end{cases}$

i.e $\begin{cases} \cos(\frac{1}{x}) = \cos(0) \\ \sin(\frac{1}{x}) = \sin(0) \end{cases}$ il suffit de $\begin{cases} \frac{1}{x} = 0 + 2k\pi \\ \frac{1}{x} = 0 + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{1}{2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

Avec un tel x, $f'(x) = -1$

En prenant $k = n$, on construit une suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

On a $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$ et $f'(x_n) = -1$

donc il fallait en conclure que f n'est pas croissante près de 0.

Comment faire ? C'est l'objet de la question 4 d).

On peut faire comme ça :

Soit $\varepsilon > 0$, Montrons que $f_{|]-\varepsilon, \varepsilon[}$ n'est pas croissante. On a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\frac{1}{2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui vérifie $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_n \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. On $f'(x_n) = -1$.

On $\lim_{x \to x_n, x \neq x_n} \frac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} = -1 = f'(x_n)$

Donc il existe $\eta > 0$ tel que si $|x - x_n| < \eta$ alors $\dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} < 0$. Or $\eta > 0$ et $x_n \in]0, \varepsilon[$

donc $\nu = \min(\eta, \varepsilon - x_n) > 0$. Donc si

$x \in]x_n - \nu, x_n + \nu[\subset]-\varepsilon, \varepsilon[$ et $x \neq x_n$

On a $\dfrac{f(x) - f(x_n)}{x - x_n} < 0$. On a donc

trouvé dans $]-\varepsilon, \varepsilon[$ x et x_n tel que

$f(x) - f(x_n)$ est de signe opposé

au signe de $x - x_n$. Donc f n'est

pas croissante en restriction à $]-\varepsilon, \varepsilon[$

Peut être qu'il suffit de dire pour 3). Non la connaissance de la dérivée positive en 0 ne permet pas de conclure à la croissance.

4). On a déjà montré que $f'(x_n) = -1$

avec $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$ $n \in \mathbb{N}$ et $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ n \in \mathbb{N}^*}} (x_n) = 0$

On considère $y_n = \dfrac{1}{2\pi n + \pi}$. Le calcul

donne $f'(y_n) = 1 + 2 = 3$

On a donc $x_{n+1} < y_n < x_n$ d'après le

théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f'

sur $[y_n, x_n]$ il existe $z_n \in]y_n, x_n[$ / $-1 = f'(x_n) < 1 = f'(z_n) < 3 = f'(y_n)$

Soit $\alpha > 0$. Soit $n > \frac{1}{2\pi\alpha}$. Alors

on a $x_n, y_n, z_n \in [-\alpha, \alpha]$ et

$f'(x_n) = -1$, $f'(y_n) = 3$ et $f'(z_n) = \underline{1}$

5) On a vu en 3) que f n'était pas croissante au voisinage de x_n qui vérifient $\lim x_n = 0$ et $f'(x_n) = -1$.

Avec les z_n qui vérifient $\lim z_n = 0$ et $f'(z_n) = -1$ on en déduit que f n'est pas décroissante

[en revenant à la définition de dérivée comme limite d'un taux d'accroissement]

c'est fini pour aujourd'hui