ANALYSE 1

15/10/20

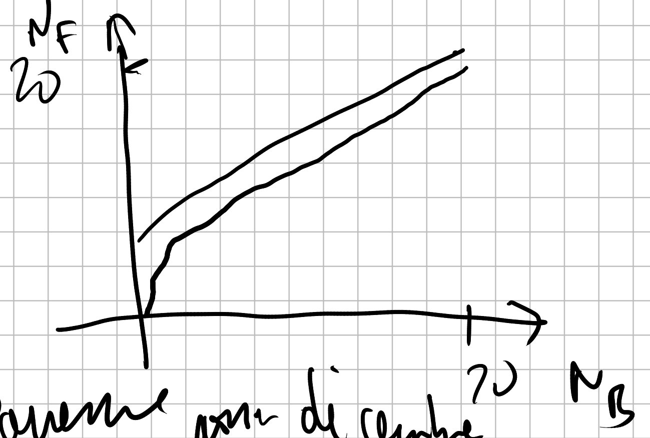
Salle 305 !!!

C'est parti

Commentaires sur le CC

Barème Chaque exo sur 5 →
Note brute sur 20 = N_b
Note finale sur 20 = N_F

$N_F = 5 + \frac{3}{4} N_b$ arrondi au 1/2 pt supérieur.



1.2.3.4

Projet de barème pour décembre

Exo 1

Principal pb généralement il est donné un η qui dépend de x

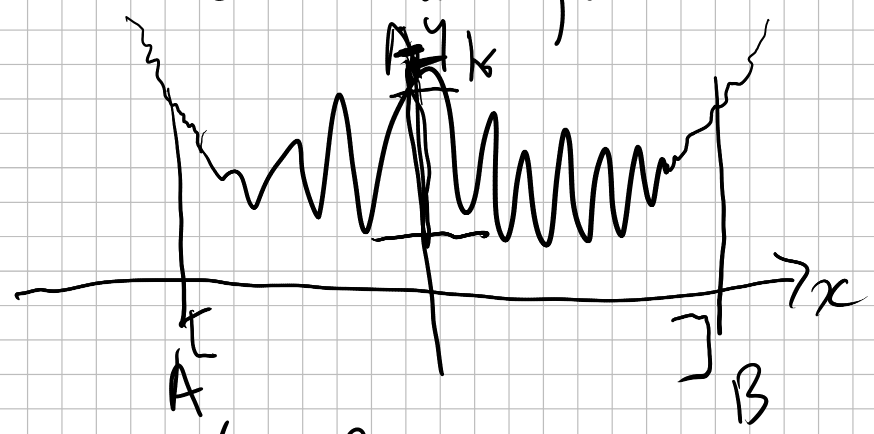
⚠ la limite de f en a :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; \forall x \; |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

le η vient avant les x et n'en dépend pas.

Exo 2

Sur le brouillon faire un dessin



$\forall K\ \exists A,B\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\quad x<A \Rightarrow f(x)>K$

$x>B \Rightarrow f(x)>K$

Fixons un K → Il nous donne A et B et on peut choisir $A<B$.

Que se passe t-il sur $[A,B]$ $\quad f([A,B])=[m,M]$

c'est à dire puisque f est continue sur le segment $[A,B]$ l'image est un segment.

Soit $c\in[A,B]\ /\ f(c)=m$

Soit $L>M$. Puisque $\lim_{+\infty} f=\lim_{-\infty} f=+\infty$

il existe $x_1<A$ $f(x_1)>L$, $x_2>B$ $f(x_2)>L$

On a $f(c)=m\leq M<L<f(x_1)$ et $f(x_2)$

Soit y compris entre m strictement et $\min(f(x_1),f(x_2))$. D'après le Th des valeurs intermédiaires sur $[x_1,c]$ et sur $[c,x_2]$ il existe $c_1\in\,]x_1,c[\,,\ c_2\in\,]c,x_2[\ \mid f(c_1)=f(c_2)=y$ $\quad c_1\neq c_2$ car $x_1<c<x_2$ □

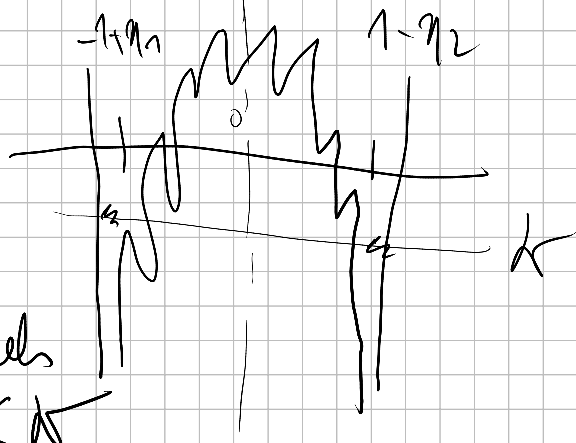
Exo 3

$f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue

avec $\lim_{-1} f = \lim_{+1} f = -\infty$.

Non surjectivité

On fait un dessin ambitieux



Soit $K < f(0)$

il existe $\eta_1 > 0$ $\eta_2 > 0$ tels

que si $x < -1+\eta_1$ $f(x) < k$

$x > 1-\eta_2$ $f(x) < k$

on pose $A = -1+\eta_1$ et $B = 1-\eta_2$

quitte à prendre $\eta_1 < \frac{1}{2}$ et $\eta_2 < 1/2$

// Toutes mes excuses pour cette interruption des programmes

On a $-1 < A < 0 < B < 1$. Puisque f continue

sur $[A,B]$ il existe $m \le M$ $f([A,B]) = [m,M]$

On a $0 \in [A,B]$ donc $m \le f(0) \le M$

Si $x \in]-1,1[$ $\to$ $x \in [A,B]$ et donc $f(x) \le M < M+1$

$\to$ $x > B$ et donc $f(x) \le k < f(0) < M+1$

$\to$ $x < A$ et donc $f(x) < k < f(0) < M+1$

Ceci signifie que $y = M+1$ n'est jamais atteint !

et donc f non surjective.

$\square$

Ex 4 $a \in]0, +\infty[$ $u_0 = 1$ $u_{n+1} = a\, u_n$

étape 1 Par récurrence on montre $u_n = a^n$ (on l'observe)

étape 2 On montre que si $a \in]0,1[$ alors $\lim_{+\infty} a^n = 0$

qui utilise ln

la démonstration ensuite. Soit $\varepsilon > 0$

Soit $N = \mathrm{Ent}\left(\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right) + 1$. Le calcul montre, parce que ln strictement croissante (et parce que $\ln a < 0$ ($a \in]0,1[$)) que si $n \geq N > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ alors

car $\ln a < 0$,

$\ln a \cdot n < \ln \varepsilon$ et par exponentiation (exp est strictement croissante car réciproque de ln)

$a^n = e^{\ln a\, n} < e^{\ln \varepsilon} = \varepsilon$

Ainsi $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ n \geq N \Rightarrow 0 < a^n < \varepsilon$

Ceci signifie que $\lim_{n \to +\infty} a^n = 0$

- si $a = 1$ $u_n = 1$ et $\lim u_n = 1$
- si $a > 1$ et si $A > 0$ alors si on pose $N = \mathrm{Ent}\left(\frac{\ln A}{\ln a}\right) + 1$

alors si $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq N$ $a^n = e^{n \ln a} \geq e^{N \ln a} \geq e^{\ln A} = A \Rightarrow \lim_{+\infty} a^n = +\infty$

Exo 5 : On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$

et $u_{n+1} = u_n - \frac{(-1)^n}{n+1} = u_n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$

On va montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n$ existe !

les mêmes avec décalage d'indices

Preuve immédiate $u_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$

$u_0=1 \quad u_1 = 1-1 \quad u_2 = 1-1+\frac{1}{2} \quad u_3 = 1-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

On reconnaît la somme partielle d'une série alternée

ie on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k$ avec

$v_0 = 1$ et $v_k = \frac{1}{k}$ si $k\neq 0$ $\quad v_k \geqslant 0$

Un théorème dit que puisque $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0 la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite.

⚠ il est important que v_k décroisse vers 0 !!!

Par exemple si $\left| \begin{array}{l} v_{2k} = \frac{1}{k} \text{ et } v_{2k+1} = 0 \text{ si } k\geqslant 1 \\ v_0 = 0 \end{array}\right.$

alors $u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ et $\lim_{+\infty} u_{2n} = +\infty$

Preuve élémentaire (esquisse). On considère v et w

$v = (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On calcule $v_n - v_{n+1}$ et $w_n - w_{n+1}$ et $v_n - w_n$ et on constate que v et w sont adjacentes donc convergent vers la même limite. Comme ce sont les suites extraites de rang pair et de rang impair de u on en déduit que u converge.

Ex 32 $g(x) = f(x) - \lambda x$

f derivable sur I donc f continue sur I

$f(x) - \lambda x$ continue sur I donc g continue sur I

$[a, b] \in I$ donc g continue sur $[a, b]$

g bornée sur $[a, b]$ et $g([a, b]) = [m, M]$

$m = \inf_{[a,b]} g(x)$

absurde

Si $c = a$ alors $\forall x \in]a, b[$ $g(x) \geq g(a)$

$f(x) - \lambda x \geq f(a) - \lambda a$

$f(x) - f(a) \geq \lambda x - \lambda a = \lambda(x - a)$

$x - a > 0$ dc $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \lambda$ $\lim_{x \to a} = f'(a)$

mais $\lambda > f'(a)$ donc contradiction $\Rightarrow c \neq a$

idem b $x < b$ donc on trouve $\lambda < f'(b)$ contradiction

2) f derivable sur $[a, b]$ λx derivable sur $\mathbb{R}$

dc $g(x)$ derivable

$g'(x) = f'(x) - \lambda$ par def $g(c)$ est min

$g'(c) = 0$ dc $f'(c) = \lambda$

Si $\lambda \in]f'(a), f'(b)[$ $\exists c \in]a, b[$

tq $f'(a) < \lambda = f'(c) < f'(b)$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

f n'est pas la dérivée d'une fct

car 0 et 1 sont atteints mais pas $1/2$

En revanche $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini par $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ si $x > 0$ vérifie la propriété des V.I, n'est pas continue en 0, et est la dérivée d'une fonction.

Exo 33 Il est traité à la main et photographié.

1) Soit $\alpha>0$ et $f : x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$. f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$. D'après le théorème des accroissements finis sur $[n,n+1]$ avec $n \geq 1$ $n \in \mathbb{N}$ il vient.

$\exists c \in]n-1,n[$ $\quad -\frac{\alpha}{c^{\alpha+1}} = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n-1)^\alpha}$ (car $n-(n-1)=1$)

or $c < n$ donc $\frac{1}{n^{\alpha+1}} < \frac{1}{c^{\alpha+1}} = \frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}$

car $x \mapsto \frac{1}{x^{\alpha+1}}$ est strictement décroissante $\square$

La séance est terminée !!!