L'épreuve comporte deux parties d'importance égale, l'Analyse et les Probabilités. Les poids de ces parties sont égaux dans le calcul de la note finale. Pour chaque partie le barème qui peut être indiqué est relatif à la partie. Il est demandé de rédiger sur des copies différentes les deux parties.

M1 MEEF, Analyse-Probabilités 1 — Université de Rennes 1, 2020-2021

Vendredi 18 décembre 2020, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 150 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Barème Chaque exercice est noté sur 10 puis affecté d'un poids qui peut être 8, 6, 4, 2 ou 0. Ce poids est d'autant plus important que la candidate ou le candidat a réussi l'exercice. La note (sur 20) obtenue est égale à $\frac{1}{10}(8x_1+6x_2+4x_3+2x_4+0x_5)$ où $x_1 \geq ... \geq x_5$ sont les notes (sur 10) ordonnées obtenues à chaque exercice.

Exercice A 1) Énoncer et prouver une des formules de Taylor.
2) Démontrer que si $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.
3) Démontrer que $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Exercice B Si $x \in \mathbf{R}$ on note $\mathrm{Ent}(x)$ sa partie entière. On rappelle que si $x \in \mathbf{Q}$ il existe $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $x = \frac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. On rappelle aussi que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Ainsi $f(0) = f(\sqrt{2}) = 0$, $f(\frac{1}{6}) = f(-\frac{7}{6}) = \frac{1}{6}$ et $f(\frac{22}{7}) = f(-\frac{6}{7}) = \frac{1}{7}$.
1) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors $|f(x)| \leq |x|$. En déduire que f est continue en 0.
2) Soit $x \in \mathbf{Q}^*$. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ est irrationnel. En déduire que f n'est pas continue en x.
3) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. On pose $k = \mathrm{Ent}(n!x)$ et $\alpha = \min(x - \frac{k}{n!}, \frac{k+1}{n!} - x)$. Montrer que $\alpha > 0$ et que si $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ vérifie $\frac{k}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{k+1}{n!}$ alors $q > n$. En déduire que f est continue en x.

Exercice C Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels.
1) Étudier la limite éventuelle de u si u est injective.
2) Étudier la limite éventuelle de u si tout entier naturel a un nombre fini d'antécédents par u.
3) Montrer qu'il existe $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ qui n'a pas de limite et qui est surjective.

Exercice D Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > 1$ alors $u_n = 2u_{\frac{n}{2}}$ si n pair et $u_n = u_{n-1} + 1$ si n impair.
1) Montrer que si $k \in \mathbf{N}$ et si $j \in \mathbf{N}$ vérifie $0 \leq j < 2^k$ alors $u_{2^k+j} = j$.
2) Montrer que si $m \in \mathbf{N}$ alors $\{n \in \mathbf{N} | u_n = m\}$ est infini.
3) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la limite éventuelle de u.

Exercice E Soient $d \in \mathbf{N}^*$, $n_1 < ... < n_d \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$. On note f et g les fonctions définies par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k - n_1}$ si $x \in \mathbf{R}$.
1) Montrer que $\mathrm{Card}(f^{-1}(0)) \leq 1 + \mathrm{Card}(g^{-1}(0))$ et que $\mathrm{Card}(g^{-1}(0)) \leq 1 + \mathrm{Card}((g')^{-1}(0))$.
2) Montrer par récurrence que si $d \in \mathbf{N}^*$ alors $f^{-1}(0)$ possède au plus $2d-1$ éléments.
3) Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Donner $n_1 < ... < n_d \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$ tels que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k}$ si $x \in \mathbf{R}$ s'annule $2d-1$ fois. On pourra raisonner à l'aide du produit $X \times \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(X^2 - R_k^2)$ où $R_1, ..., R_{d-1}$ sont des réels tels que $0 < R_1 < ... < R_{d-1}$.