L'épreuve comporte deux parties d'importance égale, l'Analyse et les Probabilités. Les poids de ces parties sont égaux dans le calcul de la note finale. Pour chaque partie le barème qui peut être indiqué est relatif à la partie. Il est demandé de rédiger sur des copies différentes les deux parties.

M1 MEEF, Analyse-Probabilités 1 — Université de Rennes 1, 2020-2021

Vendredi 18 décembre 2020, Contrôle continu, Partie Analyse

Durée = 150 minutes. Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisés

Barème Chaque exercice est noté sur 10 puis affecté d'un poids qui peut être 8, 6, 4, 2 ou 0. Ce poids est d'autant plus important que la candidate ou le candidat a réussi l'exercice. La note (sur 20) obtenue est égale à $\frac{1}{10}(8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 0x_5)$ où $x_1 \geq ... \geq x_5$ sont les notes (sur 10) ordonnées obtenues à chaque exercice.

Exercice A 1) Énoncer et prouver une des formules de Taylor.

Formule de Taylor-Young Soit $n \in \mathbf{N}$. Si $f : I \to \mathbf{R}$ est une fonction définie et $n-1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I et qui admet une dérivée n-ème en un point a de I alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon : I \to \mathbf{R}$ est une fonction qui s'annule et qui est continue en a.

Démonstration Elle est établie par récurrence sur n.
Au rang 0 l'énoncé traduit simplement la continuité de f en a. Il suffit donc de prouver l'hérédité de la propriété annoncée.
Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que la proriété est vraie jusqu'au rang n et prouvons que ceci implique qu'elle est vraie au rang $n+1$. Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I et qui admet une dérivée $n+1$-ème en un point a de I.
Puisque la dérivation est linéaire on peut supposer que pour tout entier k compris entre 0 et $n+1$, $f^{(k)}(a) = 0$.
D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à la dérivée f' qui est $n-1$ fois dérivable sur I et qui admet une dérivée n-ème au point a il existe une fonction $\varepsilon_0 : I \to \mathbf{R}$ qui s'annule et qui est continue en a telle que

$$f'(x) = (x-a)^n \varepsilon_0(x).$$

Notons ε la fonction qui vaut 0 en a et qui vaut $\varepsilon(x) = \frac{f(x)}{(x-a)^{n+1}}$ si $x \in I \setminus \{a\}$. Pour conclure à l'hérédité de la propriéte il suffit de prouver que ε est continue en a.
Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\varepsilon_0(a) = 0$ et que ε_0 est continue en a il existe $\eta > 0$ tel que si $x \in I$ et $|x-a| < \eta$ alors $|\varepsilon_0(x)| < \epsilon$. Par conséquent sur l'intervalle $I \cap]a-\eta, a+\eta[$ l'inégalité

$$|f'(x)| \leq \epsilon |x-a|^n$$

est vérifiée. D'après l'inégalité des accroissements finis ceci implique que sur cet intervalle

$$|f(x)| \leq \frac{1}{n+1} \epsilon |x-a|^{+n+1}$$

et donc

$$|\varepsilon(x)| \leq \epsilon.$$

On vient finalement de prouver

$$\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I \ |x-a| < \eta \Longrightarrow |\varepsilon(x)| \leq \epsilon$$

et ceci signifie que la fonction ε qui vaut 0 en a est bien continue en a.

Pour les énoncés et les démonstrations des formules de Taylor-Langrange et de Taylor avec reste intégral voir *Analyse - Memento*.

2) Démontrer que si $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ et si $n \in \mathbf{N}$ alors $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.

Si $n \in \mathbf{N}$ on note $\mathcal{P}_n$ la propriété suivante : $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ alors $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$.
On va prouver que $\mathcal{P}_n$ est vraie quelque soit $n \in \mathbf{N}$ par récurrence.
Vérification au rang initial. Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \frac{(1-x)+x}{1-x}\\ &= \frac{(1-x)}{1-x} + \frac{x}{1-x}\\ &= 1 + \frac{x}{1-x}\\ &= \sum_{k=0}^{0} x^k + \frac{x^{0+1}}{1-x}.\end{aligned}$$

Par conséquent $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Soit $x \in \mathbf{R}\setminus\{1\}$. D'après $\mathcal{P}_n$ on a $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$. Or, d'après $\mathcal{P}_0$, on a aussi $\dfrac{1}{1-x} = 1 + \dfrac{x}{1-x}$ et donc

$$\begin{aligned}\frac{x^{n+1}}{1-x} &= x^{n+1}\frac{1}{1-x}\\ &= x^{n+1}\left(1 + \frac{x}{1-x}\right)\\ &= x^{n+1} + x^{n+1}\frac{1}{1-x}\\ &= x^{n+1} + \frac{x^{n+2}}{1-x}.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}\\ &= \sum_{k=0}^{n} x^k + x^{n+1} + \frac{x^{n+2}}{1-x}\\ &= \sum_{k=0}^{n+} x^k + \frac{x^{n+2}}{1-x}\end{aligned}$$

et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et l'hérédité est bien établie.
Puisque $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3) Démontrer que $\tan(x) = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

D'après la formule de Taylor-Young appliquée à l'ordre 6 à la fonction sinus, à l'ordre 5 à la fonction cosinus et à l'ordre 3 à la fonction $t \in \mathbf{R} \setminus \{1\} \mapsto \frac{1}{1-t}$ on a

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^6\varepsilon_1(x)\\
\cos(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\varepsilon_2(x)\\
\frac{1}{1-t} &= 1 + t + t^2 + t^3 + t^3\varepsilon_3(t)
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = \lim\limits_{t\to 0} \varepsilon_3(t) = 0$.
On calcule $\dfrac{1}{\cos(x)}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + x^5\varepsilon_2(x)}\\
&= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 - x^5\varepsilon_2(x)\right)}\\
&= 1 + (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4) + (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4)^2 + (\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{24}x^4)^3 + x^6\varepsilon_4(x)\\
&= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + x^5\varepsilon_5(x)
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_4(x) = \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_5(x) = 0$.
Par conséquent

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\\
&= (x - \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{120}x^5 + x^6\varepsilon_1(x)) \times (1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + x^5\varepsilon_5(x))\\
&= x + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6})x^3 + (\tfrac{5}{24} - \tfrac{1}{6} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{120})x^5 + x^6\varepsilon(x)\\
&= x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + x^6\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercice B Si $x \in \mathbf{R}$ on note $\mathrm{Ent}(x)$ sa partie entière. On rappelle que si $x \in \mathbf{Q}$ il existe $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $x = \frac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. On rappelle aussi que $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$ et $f(x) = \frac{1}{q}$ si $x = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ tel que $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Ainsi $f(0) = f(\sqrt{2}) = 0$, $f(\frac{1}{6}) = f(-\frac{7}{6}) = \frac{1}{6}$ et $f(\frac{22}{7}) = f(-\frac{6}{7}) = \frac{1}{7}$.
1) Montrer que si $x \in \mathbf{R}$ alors $|f(x)| \leq |x|$. En déduire que f est continue en 0.

Soit $x \in \mathbf{R}$. Si $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$ alors $|f(x)| = 0 \leq |x|$. Sinon, $x \in \mathbf{Q}^*$ et il existe $(p,q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $x = \frac{p}{q}$ avec $\mathrm{pgcd}(p,q) = 1$. Dans ce cas $|f(x)| = \frac{1}{q} \leq \left|\frac{p}{q}\right| = |x|$ car, puisque $x \neq 0$, $|p| \geq 1$. Finalement quelque soit $x \in \mathbf{R}$ on a $|f(x)| \leq |x|$.

Par conséquent si $\varepsilon > 0$ alors en posant $\eta = \varepsilon$ il vient $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leq |x| < \eta = \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x - 0| = |x| < \eta$. Ceci signifie que f est continue en 0.

2) Soit $x \in \mathbf{Q}^*$. Montrer que si $n \in \mathbf{N}$ alors $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ est irrationnel. En déduire que f n'est pas continue en x.

Soit $x \in \mathbf{Q}^*$.
Il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $x = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons par l'absurde que $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ est irrationnel. Si ce n'est pas le cas il existe $(P, Q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1} = \frac{P}{Q}$ avec $\text{pgcd}(P, Q) = 1$. Il vient $\frac{p}{q} + \frac{\sqrt{2}}{n+1} = \frac{P}{Q}$ et donc $\sqrt{2} = \frac{(n+1)(Pq-Qp)}{Qq} \in \mathbf{Q}$ et ceci contredit $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$. Par conséquent l'hypothèse $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ n'est pas irrationnel est fausse et donc $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ est irrationnel.
Puisque la suite $(x + \frac{\sqrt{2}}{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers x, si f est continue en x la suite $(f(x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}))_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $f(x) = \frac{1}{q} \neq 0$. Or, si $n \in \mathbf{N}$ le nombre $x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}$ est irrationnel et donc $f(x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}) = 0$. Par conséquent la suite $(f(x + \frac{\sqrt{2}}{n+1}))_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite nulle et elle ne tend pas vers $f(x)$. Par conséquent la fonction f n'est pas continue en x.

3) Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$ tels que $\frac{1}{n} < \varepsilon$. On pose $k = \text{Ent}(n!x)$ et $\alpha = \min(x - \frac{k}{n!}, \frac{k+1}{n!} - x)$. Montrer que $\alpha > 0$ et que si $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ vérifie $\frac{k}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{k+1}{n!}$ alors $q > n$. En déduire que f est continue en x.

Puisque $k = \text{Ent}(n!x)$ et que x et donc $n!x$ sont irrationnels on a $k < n!x < k+1$ et en divisant par $n!$ qui est strictement positif il vient $\frac{k}{n!} < x < \frac{k+1}{n!}$ et donc $0 < x - \frac{k}{n!}$ et $0 < \frac{k+1}{n!} - x$. Par conséquent $\alpha = \min(x - \frac{k}{n!}, \frac{k+1}{n!} - x) > 0$.
Si $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ vérifie $\frac{k}{n!} < \frac{p}{q} < \frac{k+1}{n!}$ alors $k < \frac{n!p}{q} < (k+1)$. Par conséquent $\frac{n!p}{q}$ est compris strictement entre deux entiers successifs et il n'est donc pas entier. Ceci implique que q ne divise pas $n!p$. Puisque $n!p$ est divisible par tout entier compris entre 1 et n on en déduit que $q > n$.
Soit $y \in \mathbf{R}$ tel $|x - y| < \alpha$. Si $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}^*$ alors $f(y) = f(x) = 0$ et donc $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Si $y \in \mathbf{Q}^*$ alors il existe existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^* \times \mathbf{N}^*$ unique tel que $y = \frac{p}{q}$ avec $\text{pgcd}(p, q) = 1$. D'après ce qui précède $q > n$ et puisque $\frac{1}{n} < \varepsilon$ il vient $|f(y) - f(x)| = |f(y)| = \frac{1}{q} < \frac{1}{n} < \varepsilon$.
On vient de montrer que si $\varepsilon > 0$, en considérant η comme défini dans l'énoncé de la question, alors $\eta > 0$ et $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ tel que $|y - x| < \eta$. Ainsi f est continue en x.

Exercice C Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ une suite d'entiers naturels.
1) Étudier la limite éventuelle de u si u est injective.

Puisque u est supposée injective, si $k \in \mathbf{N}$, il existe au plus un entier $n \in \mathbf{N}$ tel que $u_n = k$. S'il existe on le note n_k et sinon on pose $n_k = 0$.
Soit $K \in \mathbf{R}$. On pose $L = \max(0, 1 + \text{Ent}(K))$ et on pose $A = \max(\{n_0, ..., n_L\})$. Par construction $u^{-1}(\{0, ..., L\}) \subset \{0, ..., A\}$. Donc, puisque u est à valeurs dans $\mathbf{N}$, si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n > A$ alors $u_n > L > K$.
On vient de prouver que si $K \in \mathbf{R}$ il existe $A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n > K$ dès que $n > A$. Ceci prouve que la suite u tend vers $+\infty$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) Étudier la limite éventuelle de u si tout entier naturel a un nombre fini d'antécédents par u.

L'épreuve comporte deux parties d'importance égale, l'Analyse et les Probabilités. Les poids de ces parties sont égaux dans le calcul de la note finale. Pour chaque partie le barème qui peut être indiqué est relatif à la partie. Il est demandé de rédiger sur des copies différentes les deux parties.

Puisque tout entier naturel a un nombre fini d'antécédents par u, si $k \in \mathbf{N}$ l'ensemble $u^{-1}(k)$ est fini et, soit il est vide et on pose $n_k = 0$, soit il n'est pas vide mais fini et on note n_k le maximum $\max(u^{-1}(k))$.
Soit $K \in \mathbf{R}$. On pose $L = \max(0, 1+\text{Ent}(K))$ et on pose $A = \max\{n_0, ..., n_L\}$. Par construction $L > K$ et $u^{-1}(\{0, ..., L\}) \subset \{0, ..., A\}$. Donc, puisque u est à valeurs dans $\mathbf{N}$, si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n > A$ alors $u_n > L > K$.
On vient de prouver que si $K \in \mathbf{R}$ il existe $A \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $u_n > K$ dès que $n > A$. Ceci prouve que la suite u tend vers $+\infty$ c'est à dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3) Montrer qu'il existe $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ qui n'a pas de limite et qui est surjective.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ définie par $u_{2k} = 0$ et $u_{2k+1} = k$ si $k \in \mathbf{N}$. La suite u ainsi définie est une surjection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ puisque tout entier $k \in \mathbf{N}$ admet au moins un antécédent, l'entier $n = 2k + 1$. La suite extraite des termes de rang pair est la suite nulle et tend donc vers 0 alors que la suite extraite des termes de rang impair est la suite des entiers naturels k, $k \in \mathbf{N}$ qui tend vers $+\infty$. Ces deux suites extraites ont des limites différentes donc la suite u n'a pas de limite.

Exercice D Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$ et pour $n \in \mathbf{N}$ tel que $n > 1$ alors $u_n = 2u_{\frac{n}{2}}$ si n pair et $u_n = u_{n-1} + 1$ si n impair.
1) Montrer que si $k \in \mathbf{N}$ et si $j \in \mathbf{N}$ vérifie $0 \le j < 2^k$ alors $u_{2^k+j} = j$.

On va prouver par récurrence sur $k \in \mathbf{N}$ la propriété $\mathcal{P}_k$ suivante : si $j \in \mathbf{N}$ vérifie $0 \le j < 2^k$ alors $u_{2^k+j} = j$
Vérification au rang initial. Soit $k = 0$. Le seul $j \in \mathbf{N}$ qui vérifie $0 \le j < 2^0$ est $j = 0$ et on a bien $u_{2^0+0} = u_1 = 0$. Par conséquent $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité. Soit $k \in \mathbf{N}$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie. Soit $j \in \mathbf{N}$ qui vérifie $0 \le j < 2^{k+1}$.
Si j est pair alors $j = 2i$ avec i entier naturel qui vérifie $0 \le i < 2^k$. D'après l'hypothèse de récurrence $u_{2^k+i} = i$ et donc, d'après la définition de la suite et puisque $2^{k+1} + j$ est pair,

$$\begin{aligned} u_{2^{k+1}+j} &= u_{2^{k+1}+2i} \\ &= u_{2(2^k+i)} \\ &= 2u_{2^k+i} \\ &= 2i \\ &= j. \end{aligned}$$

Si j est impair alors $j = 2i + 1$ avec i entier naturel qui vérifie $0 \le i < 2^k$. D'après ce qui est établi dans le cas pair $u_{2^{k+1}+2i} = 2i$. Aussi, en utilisant la définition de la suite, on a, puisque $2^{k+1} + j$ est impair,

$$\begin{aligned} u_{2^{k+1}+j} &= u_{2^{k+1}+2i+1} \\ &= u_{2^{k+1}+2i} + 1 \\ &= 2i + 1 \\ &= j. \end{aligned}$$

On vient de prouver que dans tous les cas, si $j \in \mathbf{N}$ qui vérifie $0 \le j < 2^{k+1}$, alors $u_{2^{k+1}+j} = j$.
Ainsi $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie pourvu que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. Ceci établit l'hérédité de la propriété.

L'épreuve comporte deux parties d'importance égale, l'Analyse et les Probabilités. Les poids de ces parties sont égaux dans le calcul de la note finale. Pour chaque partie le barème qui peut être indiqué est relatif à la partie. Il est demandé de rédiger sur des copies différentes les deux parties.

Puisque $\mathcal{P}_k$ est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2) Montrer que si $m \in \mathbf{N}$ alors $\{n \in \mathbf{N} | u_n = m\}$ est infini.

Soit $m \in \mathbf{N}$. Pour tout $k \in \mathbf{N}$ tel que $k \geq m$ on a $2^k > m$ et donc $u_{2^k+m} = m$ d'après la question 1). Par conséquent l'ensemble $\{2^k + m \in \mathbf{N} | k \in \mathbf{N} \text{ et } k \geq m\}$ qui est infini est inclus dans $\{n \in \mathbf{N} | u_n = m\}$ et donc ce dernier est infini.

3) Étudier l'injectivité, la surjectivité et la limite éventuelle de u.

La suite u n'est pas injective car $u_0 = u_1 = 0$ et donc 0 a au moins deux antécédents.
La suite u est surjective car si $m \in \mathbf{N}$ alors m a au moins un antécédent puisque, d'après la question 2), $\{n \in \mathbf{N} | u_n = m\}$ est infini.
La suite extraite des termes u_{2^m+m}, $m \in \mathbf{N}$ est la suite des termes m, $m \in \mathbf{N}$. Elle tend donc vers $+\infty$. La suite extraite des termes u_{2^k}, $k \in \mathbf{N}$ est la suite nulle. Elle tend donc vers 0. Puisque ces deux suites extraites ont des limites différentes la suite u n'a pas de limite.

Exercice E Soient $d \in \mathbf{N}^*$, $n_1 < ... < n_d \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$. On note f et g les fonctions définies par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k - n_1}$ si $x \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que $\text{Card}(f^{-1}(0)) \leq 1 + \text{Card}(g^{-1}(0))$ et que $\text{Card}(g^{-1}(0)) \leq 1 + \text{Card}((g')^{-1}(0))$.

Les fonctions f et g sont polynomiales. Elles sont non nulles car les coefficients a_k sont non nuls. Elles ont donc un nombre fini de zéros : $\text{Card}(f^{-1}(0))$ et $\text{Card}(g^{-1}(0))$ sont finis.
Si $x \in \mathbf{R}$ on a $f(x) = x^{n_1} g(x)$. Par conséquent si $f(x) = 0$ alors $x = 0$ ou $g(x) = 0$. Ainsi $f^{-1}(0) \subset g^{-1}(0) \cup \{0\}$ et donc $\text{Card}(f^{-1}(0)) \leq 1 + \text{Card}(g^{-1}(0))$.
Si $\text{Card}(g^{-1}(0)) \leq 1$ alors $\text{Card}(g^{-1}(0)) \leq 1 + \text{Card}((g')^{-1}(0))$. Sinon $\text{Card}(g^{-1}(0)) > 1$ et il existe $x_1 < ... < x_k$ où $k = \text{Card}(g^{-1}(0))$ tels que $g^{-1}(0) = \{x_1, ..., x_k\}$. Soit $i \in \{1, ..., k-1\}$. D'après le théorème de Rolle appliqué à g qui est dérivable sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ il existe $s_i \in]x_1, x_{i+1}[$ tel que $g'(s_i) = 0$. Puisque $s_1 < ... < s_{k-1}$ et que $\{s_1, ..., s_{k-1}\} \subset (g')^{-1}(0)$ il vient $\text{Card}(g^{-1}(0)) - 1 = k - 1 \leq \text{Card}((g')^{-1}(0))$ et donc $\text{Card}(g^{-1}(0)) \leq 1 + \text{Card}((g')^{-1}(0))$.

2) Montrer par récurrence que si $d \in \mathbf{N}^*$ alors $f^{-1}(0)$ possède au plus $2d - 1$ éléments.

On va prouver par récurrence sur $d \in \mathbf{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}_d$ suivante : si $n_1 < ... < n_d \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$ alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k}$ est telle que $f^{-1}(0)$ possède au plus $2d - 1$ éléments.
Vérification au rang initial. Soit $d = 1$. Soient $n_1 \in \mathbf{N}$, et $a_1 \in \mathbf{R}^*$. Alors la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = a_1 x^{n_1}$ s'annule au plus en $x = 0$ et donc $f^{-1}(0)$ possède au plus 1 élément et 1 vérifie bien $1 = 2 \times 1 - 1$. Par conséquent $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ fixé. On suppose que $\mathcal{P}_d$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}_{d+1}$ est vraie. Soient $n_1 < ... < n_{d+1} \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_{d+1} \in \mathbf{R}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d+1} a_k x^{n_k}$ et la fonction g définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d+1} a_k x^{n_k - n_1}$.
La dérivée g' de g vérifie $g'(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{d+1} (n_k - n_1) a_k x^{n_k - n_1 - 1}$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque g' est la somme de d monômes, $(g')^{-1}(0)$ possède au plus $2d - 1$ éléments. Ceci, combiné

aux inégalités obtenues en réponse à la question 1), donne

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(f^{-1}(0)) &\leq 1+\mathrm{Card}(g^{-1}(0))\\ &\leq 1+(1+\mathrm{Card}((g')^{-1}(0)))\\ &\leq 2+(2d-1)\\ &\leq 2(d+1)-1.\end{aligned}$$

On vient de prouver que si $\mathcal{P}_d$ est vraie alors $\mathcal{P}_{d+1}$ l'est aussi. C'est l'hérédité de la propriété. Puisque $\mathcal{P}_d$ est vraie au rang 0 et qu'elle est héréditaire, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $d \in \mathbf{N}$.

3) Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Donner $n_1 < ... < n_d \in \mathbf{N}$ et $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$ tels que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{n_k}$ si $x \in \mathbf{R}$ s'annule $2d-1$ fois. On pourra raisonner à l'aide du produit $X \times \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(X^2 - R_k^2)$ où $R_1, ..., R_{d-1}$ sont des réels tels que $0 < R_1 < ... < R_{d-1}$.

On note $P(X)$ le polynôme $P(X) = X \times \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(X^2 - R_k^2)$ et $Q(X)$ le polynôme $Q(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(X - R_k^2)$.
Le polynôme $P(X)$ possède $2d-1$ zéros, 0 et les réels R_k et $-R_k$ pour $k = 1, ..., d-1$.
Le polynôme $Q(X)$ est de degré $d-1$. Il existe $a_1, ..., a_d \in \mathbf{R}^*$ tels que $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^{k-1}$.
Les coefficients a_k sont obtenus en développant $Q(X)$:

$$a_d = 1 \quad \text{et} \quad a_k = (-1)^{d-k} \left(\sum_{0 \leq l_1 < ... < l_{d-k} \leq d} \prod_{i=1}^{d-k} R_{l_i}^2 \right) \quad \text{si} \quad k = 1, ..., d-1.$$

On a $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k X^{2k-1}$.

La fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{d} a_k x^{2k-1}$ s'annule $2d-1$ fois donc les entiers $2d-1$ pour $k = 1, ..., d$ et les réels $a_1, ..., a_d$ répondent à la question.